


Circuits électriques linéaires

Techniques d'analyse

A. Le Nadan, G. Sinou

HERMANN  ÉDITEURS DES SCIENCES ET DES ARTS

METHODES

ANDRÉ LE NADAN, GUILLAUME SINOU

CIRCUITS ÉLECTRIQUES LINÉAIRES

Cet ouvrage présente les techniques utilisées pour la résolution des circuits électriques et électroniques. Il fait appel à la méthode des branches, à celles des nœuds et des mailles, ainsi qu'aux théorèmes de Thévenin et de Norton. Les démonstrations sont étayées par des exemples choisis à la fois pour faciliter la compréhension et dégager les modes opératoires.

Les différents chapitres sont illustrés par 110 exercices corrigés qui font souvent intervenir des schémas équivalents dynamiques de circuits électroniques.

Le livre s'adresse à un large public : élèves des classes préparatoires, étudiants en DEUG scientifiques, BTS et IUT ou préparant le CAPES ou l'agrégation de physique ; il sera également utile aux électroniciens qui désirent actualiser leurs connaissances.

André Le Nadan est Professeur à la Faculté des Sciences de Brest, où il enseigne la théorie des circuits en première année de Deug A.

Sa thèse a porté sur l'étude expérimentale de la diffusion élastique et inélastique d'électrons de basse énergie par des atomes d'hélium. Il participe actuellement à la direction du groupe de recherche sur les interactions atomes métastables-molécules au sein du laboratoire des collisions électroniques et atomiques (L.C.E.A) de l'Université de Bretagne Occidentale.

Guillaume Sinou est Maître de Conférences hors classe à la Faculté des Sciences de Brest. Détaché en Algérie pendant de nombreuses années, il a exercé les fonctions de Professeur d'Électronique à la Faculté des Sciences d'Alger.

Sa thèse a porté sur l'ionisation, près des seuils, de molécules diatomiques et triatomiques par impacts d'électrons. Il poursuit actuellement ses travaux de recherche sur l'ionisation Penning au L.C.E.A. de Brest.

ISBN 2 7056 6248 0



HERMANN  ÉDITEURS DES SCIENCES ET DES ARTS

André Le Nadan, Guillaume Sinou

CIRCUITS ÉLECTRIQUES LINÉAIRES

Techniques d'analyse

COLLECTION  MÉTHODES

HERMANN, ÉDITEURS DES SCIENCES ET DES ARTS

André LE NADAN est Professeur à la Faculté des Sciences de Brest, où il enseigne la théorie des circuits en première année de Deug A.

Sa thèse a porté sur l'étude expérimentale de la diffusion élastique et inélastique d'électrons de basse énergie par des atomes d'hélium. Il participe actuellement à la direction du groupe de recherche sur les interactions atomes métastables-molécules au sein du laboratoire des collisions électroniques et atomiques (L.C.E.A) de l'Université de Bretagne Occidentale.

Guillaume SINOU est Maître de Conférences hors classe à la Faculté des Sciences de Brest. Détaché en Algérie pendant de nombreuses années, il a exercé les fonctions de Professeur d'Électronique à la Faculté des Sciences d'Alger.

Sa thèse a porté sur l'ionisation, près des seuils, de molécules diatomiques et triatomiques par impacts d'électrons. Il poursuit actuellement ses travaux de recherche sur l'ionisation Penning au L.C.E.A. de Brest.

ISBN 2 7056 6248 0

© 1994, Hermann, éditeurs des sciences et des arts, 293 rue Lecourbe, 75015 Paris

Toute reproduction ou représentation de cet ouvrage, intégrale ou partielle, serait illicite sans l'autorisation de l'éditeur et constituerait une contrefaçon.

Les cas strictement limités à usage privé ou de citation, sont régis par la loi du 11 mars 1957.

Table

Préface	xi
Avant-propos	xiii
I. NOTIONS DE COURANT ET DE POTENTIEL	1
1. Notion de courant	1
1.1. Définition de l'intensité	1
1.2. Sens conventionnel du courant	2
1.3. Notations	2
2. Notion de potentiel	2
2.1. Travail de la force électrique	2
2.2. Différence de potentiel et tension	4
II. DIPÔLES ÉLECTRIQUES LINÉAIRES	5
1. Généralités	5
1.1. Définition	5
1.2. Classification des dipôles	5
1.3. Caractéristiques u , i et i , u	5
1.4. Conventions récepteur et générateur	6
1.5. Énergie reçue par un dipôle	6
1.6. Puissance reçue par un dipôle	6
2. Caractéristiques des dipôles linéaires parfaits	7
2.1. Résistor ou élément résistif	7
2.1.1. Caractéristiques u , i et i , u	7
2.1.2. Représentation	8
2.1.3. Puissance et énergie absorbées	8
2.2. Source de tension indépendante idéale	9
2.2.1. Définition et caractéristique u , i	9

2.2.2.	Représentation	9
2.2.3.	Schéma équivalent pour une source de tension continue	10
2.3.	Source de courant indépendante idéale	10
2.3.1.	Définition et caractéristique i, u	10
2.3.2.	Représentation	11
2.4.	Sources contrôlées ou liées	11
	Énoncés des exercices	12
	Calcul de tensions	12
	Puissance reçue par un dipôle	13
III.	LOIS DE KIRCHHOFF : APPLICATIONS SIMPLES	17
1.	Définitions	17
2.	Lois de Kirchhoff	17
2.1.	Première loi : loi des nœuds	17
2.2.	Deuxième loi : loi des mailles	19
3.	Applications simples	22
3.1.	Associations de dipôles	22
3.1.1.	Association de résistors en série	22
3.1.2.	Association de résistors en parallèle	23
3.1.3.	Association de sources de tension en série	24
3.1.4.	Association de sources de courant en parallèle	25
3.2.	Circuits à une maille et circuits à deux nœuds	25
3.2.1.	Étude d'un circuit à une maille	25
3.2.2.	Étude d'un circuit à deux nœuds	28
3.3.	Diviseurs de tension et de courant	29
3.3.1.	Diviseur de tension	29
3.3.2.	Diviseur de courant	30
3.4.	Dualité tension-courant	31
3.5.	Application aux sources réelles	33
3.5.1.	Modélisation	33
3.5.2.	Puissance délivrée par un générateur	35

Énoncés des exercices	36
Loi des nœuds	36
Loi des mailles	38
Associations de résistors	39
Diviseurs de tension et de courant	40
Circuits à une maille et à deux nœuds	41
Générateurs	42
Transformations de générateurs	42
IV. ANALYSE DES RÉSEAUX RÉSISTIFS	45
1. Méthode générale des courants de branches	46
1.1. Équations de nœuds	46
1.2. Équations de mailles – choix des mailles indépendantes	47
1.3. Résolution du système d'équations	48
2. Méthode simplifiée des courants de branches	49
2.1. Principe	49
2.2. Exemple	49
2.3. Mise en œuvre de la méthode	50
3. Méthode des mailles	51
3.1. Définition des courants de mailles	51
3.2. Relation entre courants de branches et courants de mailles	52
3.3. Forme des équations de nœuds	53
3.4. Forme des équations de mailles pour un réseau ne comportant que de sources indépendantes	53
3.4.1. Analyse du problème	53
3.4.2. Construction pratique des équations	54
3.4.3. Exemple	55
3.5. Forme des équations de mailles dans le cas général	55
3.5.1. Principe	55
3.5.2. Exemple	56
4. Méthode des nœuds	57
4.1. Principe	57

4.2.	Mise en œuvre de la méthode	59
4.3.	Exemple	59
5.	Théorème de superposition	61
5.1.	Démonstration	61
5.2.	Utilisation pratique	62
5.3.	Exemple	63
6.	Théorèmes de Thévenin et de Norton	63
6.1.	Démonstration du théorème de Thévenin	64
6.2.	Démonstration du théorème de Norton	66
6.3.	Énoncés pour des réseaux résistifs	69
6.4.	Équivalence Thévenin-Norton	71
6.5.	Exemples	72
6.5.1.	Pont potentiométrique	72
6.5.2.	Réseau comportant deux sources indépendantes	73
6.5.3.	Réseau comportant une source contrôlée	75
7.	Théorème de Millman	77
8.	Théorème de Kennely	78
	Énoncés des exercices	80
	Paramètres d'un réseau	80
	Méthode générale des courants de branches	81
	Méthode simplifiée des courants de branches	81
	Méthode des mailles	83
	Méthode des nœuds	85
	Théorème de superposition	86
	Théorèmes de Thévenin et de Norton	86
	Théorèmes de Millman et de Kennely	90
V.	RÉSEAUX RLC EN RÉGIME PERMANENT SINUSOÏDAL	91
1.	Généralités	91
1.1.	Définitions	91
1.2.	Valeurs moyennes et efficaces	92

1.2.1.	Quantité d'électricité	92
1.2.2.	Valeur moyenne de l'intensité	92
1.2.3.	Valeur quadratique moyenne de l'intensité	92
1.2.4.	Intensité efficace	93
2.	Représentation d'une grandeur sinusoïdale	94
2.1.	Représentation vectorielle	94
2.2.	Représentation complexe	95
2.2.1.	Généralités	95
2.2.2.	Principe de la représentation	97
3.	Propriétés des dipôles passifs en régime sinusoïdal	98
3.1.	Résistor	98
3.2.	Condensateur	99
3.3.	Bobine	101
4.	Méthodes d'analyse des réseaux en régime sinusoïdal	102
4.1.	Méthode directe	103
4.2.	Méthode de Fresnel	105
4.3.	Méthode des amplitudes complexes	106
4.4.	Comparaison des méthodes	107
5.	Mise en œuvre de la méthode des amplitudes complexes	107
5.1.	Notion d'impédance complexe	107
5.2.	Expressions des impédances complexes	108
5.3.	Lois de Kirchhoff	108
5.4.	Lois d'association et loi d'Ohm	109
5.5.	Analyse des réseaux	110
6.	Puissance en régime sinusoïdal	111
6.1.	Puissances instantanée et moyenne	111
6.2.	Puissances active et apparente	112
6.3.	Puissance réactive	113

7.	Influence de la fréquence	114
7.1.	Fonctions de transfert	114
7.1.1.	Définition	114
7.1.2.	Diagramme de Bode	114
7.1.3.	Diagramme de Nyquist	114
7.2.	Résonance	114
	Énoncés des exercices	116
	Méthode de Fresnel	116
	Calculs d'impédances complexes	116
	Ponts de mesures	119
	Circuits électriques	120
	Puissance	124
	Fonctions de transfert – Filtres	125
	 ANNEXE : RÉOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES	 129
1.	Calcul d'un déterminant	129
1.1.	Définitions	129
1.2.	Propriétés	130
2.	Méthode de Cramer	132
2.1.	Définition	132
2.2.	Principe	132
2.3.	Exemples	133
	Corrigés des exercices	135
	Exercices sur le chapitre 2	135
	Exercices sur le chapitre 3	139
	Exercices sur le chapitre 4	157
	Exercices sur le chapitre 5	203
	 Index	 257

Préface

Cet ouvrage présente les techniques utilisées pour la résolution des circuits électriques et électroniques. Il fait appel à la méthode des branches, à celles des nœuds et des mailles, ainsi qu'aux théorèmes de Thévenin et de Norton. Les démonstrations sont étayées par des exemples choisis à la fois pour faciliter la compréhension et dégager les modes opératoires.

Les différents chapitres sont illustrés par 110 exercices corrigés qui font souvent intervenir des schémas équivalents dynamiques de circuits électroniques.

Le livre s'adresse à un large public : élèves des classes préparatoires, étudiants en DEUG scientifiques, BTS et IUT ou préparant le CAPES ou l'agrégation de physique ; il sera également utile aux électroniciens qui désirent actualiser leurs connaissances.

Avant-propos

Pour résoudre un circuit électrique, aussi complexe soit-il, il suffit, en théorie, d'appliquer la loi d'Ohm et les deux lois de Kirchhoff (loi des noeuds, et loi des mailles).

Cet ouvrage débute par l'étude de ces lois fondamentales : il insiste sur le fait que la loi d'Ohm n'établit pas seulement une relation de proportionnalité entre la tension et l'intensité du courant, mais détermine également les orientations des flèches associées.

Les lois de Kirchhoff sont données à la fois pour des tensions et des courants inconnus. Nous utilisons à cet effet des notations symboliques originales permettant de les expliciter aisément. Nous expliquons pour quelles raisons il est avantageux de transformer un réseau en ne conservant que des sources de tension ou de courant, suivant la nature des inconnues.

Les méthodes d'analyse sont ensuite présentées dans le cadre le plus simple qui puisse s'envisager : celui des réseaux purement résistifs. Cette démarche permet d'exposer la méthode des mailles, des noeuds, les théorèmes de Thévenin et de Norton à partir de connaissances très élémentaires. Les sources contrôlées linéaires, présentes dans les schémas équivalents dynamiques de composants actifs, sont volontairement introduites, afin de ne pas masquer les difficultés qu'elles suscitent dans l'application des théorèmes précédents. Elles sont distinguées des sources indépendantes par des symboles spécifiques.

Sans aucune difficulté mathématique, l'étudiant trouve alors à sa portée l'étude des schémas "réalistes", et non plus seulement "didactiques".

Lorsque les méthodes d'analyse sont ainsi assimilées, il ne reste plus qu'à les étendre au régime permanent sinusoïdal, en remplaçant la notion de résistance ohmique par celle d'impédance complexe, après avoir défini l'inductance et la capacité. C'est l'objet du dernier chapitre, au terme duquel l'étudiant qui

a su se familiariser avec la notion de signal complexe est en mesure de calculer des fonctions de transfert de systèmes du premier et du deuxième ordre. Il peut ensuite en représenter graphiquement les courbes de réponse sous forme d'un diagramme de Bode en phase et amplitude, l'utilisation du décibel étant acquise à cette occasion.

Cet ouvrage fait une très large place aux exercices d'application, qui sont présentés par ordre d'intérêt et de difficulté croissant.

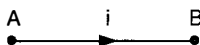
Notions de courant et de potentiel

1 Notion de courant

1.1 Définition de l'intensité

Lorsqu'on étudie un circuit électrique, on cherche à déterminer à un instant donné le débit des porteurs de charges dans un ou plusieurs conducteurs, ainsi que le sens dans lequel ils se déplacent.

Pour ce faire, on commence par orienter les conducteurs du circuit en définissant sur chacun d'eux un sens positif, choisi arbitrairement et matérialisé par une flèche :



Dans le conducteur AB, l'intensité i du courant, à l'instant t , est définie comme le quotient :

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

$dq(t)$ représente la charge élémentaire (positive ou négative) qui s'écoule à travers une section quelconque, entre les instants t et $t + dt$.

Dans cette expression, le signe de $i(t)$ est déterminé à tout moment par celui de la charge $dq(t)$ et par le sens dans lequel elle se déplace. On peut en effet envisager deux cas :

- $i(t)$ est positif à l'instant t : ce cas correspond à un mouvement de charges positives dans le sens du conducteur, ou à celui de charges négatives en sens inverse.
- $i(t)$ est négatif à l'instant t : ce cas correspond à un mouvement de charges négatives dans le sens du conducteur, ou à celui de charges positives en sens inverse.

1.2 Sens conventionnel du courant

Par définition :

Le sens conventionnel du courant dans un conducteur est celui dans lequel se déplaceraient des charges positives.

D'après la discussion précédente, si à l'instant t :

- $i(t)$ est positif \Rightarrow le courant conventionnel circule dans le sens positif du conducteur.
- $i(t)$ est négatif \Rightarrow le courant conventionnel circule dans le sens négatif du conducteur.

Dans le système international, l'unité de charge électrique est le coulomb (C), et l'unité d'intensité l'ampère (A).

1.3 Notations

La relation $i(t) = dq(t)/dt$ montre que l'intensité d'un courant est une grandeur susceptible de varier en signe et en valeur absolue au cours du temps. Pour alléger l'écriture, on adopte la convention suivante :

- on représente par une lettre minuscule toute intensité susceptible de varier au cours du temps.
- on représente par une lettre majuscule toute intensité constante au cours du temps.

Les notations i et $i(t)$ sont donc strictement équivalentes. Une intensité notée I (positive ou négative) correspond à un courant continu.

2 Notion de potentiel

2.1 Travail de la force électrique

Une particule de charge q placée dans un champ électrique \vec{E} est soumise à la force :

$$\vec{F} = q \vec{E}$$

Lorsque la particule se déplace d'un point M de coordonnées x, y, z à un point M' infiniment voisin, de coordonnées $x + dx, y + dy, z + dz$, le travail de cette force a pour expression :

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = q \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

où $d\vec{r}$ représente le vecteur déplacement élémentaire $\vec{MM'}$, de composantes dx, dy, dz .

On démontre que le champ \vec{E} en un point quelconque peut toujours s'exprimer sous la forme :

$$\vec{E}(x, y, z) = - \left[\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} \vec{k} \right]$$

où u représente une fonction scalaire de x, y, z appelée potentiel électrique. Si on admet ce résultat, on obtient :

$$dW = -q \left[\frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \right] \cdot \left[dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k} \right]$$

$$\text{soit encore : } dW = -q \left[\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right]$$

Le crochet représente la différentielle totale exacte de u , de sorte que :

$$dW = -q du$$

\rightarrow Cette expression permet de calculer par intégration le travail de la force \vec{F} entre deux points quelconques A (x_A, y_A, z_A) et B (x_B, y_B, z_B) situés à une distance finie l'un de l'autre :

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B dW = -q \int_A^B du$$

soit :

$$W_{A \rightarrow B} = q(u_A - u_B)$$

Le travail $W_{A \rightarrow B}$ est indépendant du chemin suivi par la particule pour aller de A à B ; il ne dépend que de la différence de potentiel entre ces deux points.

On remarque que dans le cas particulier où les points A et B sont confondus, le travail correspondant est nul ; de ce fait, le déplacement d'une particule chargée le long d'un circuit fermé ne nécessite aucune dépense d'énergie.

Dans le système international, les potentiels s'expriment en volts (symbole V ; 1 volt = 1 joule / coulomb).

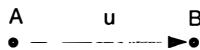
2.2 Différence de potentiel et tension

Par convention, on associe à la tension entre 2 points, ou différence de potentiel (en abrégé d.d.p.), une flèche destinée à faciliter les calculs et à lever toute ambiguïté quant au choix réalisé pour exprimer cette différence.

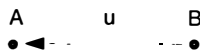
La flèche représente le potentiel de la pointe diminué de celui du talon.

Exemples :

La flèche associée à u pointe vers B :
 u représente la différence $u = u_B - u_A$.



La flèche associée à u pointe vers A :
 u représente la différence $u = u_A - u_B$.



Remarques :

1) Les notations définies pour les intensités sont applicables aux tensions : une lettre minuscule telle que u représente, tout comme $u(t)$, une quantité algébrique susceptible de varier au cours du temps en signe et en valeur absolue. Une tension constante, positive ou négative, peut être représentée par une lettre majuscule telle que U .

2) Le sens de la flèche associée à la d.d.p. entre deux points A et B ne préjuge pas des valeurs relatives des potentiels en ces deux points. Dans l'exemple 2 du paragraphe précédent, si la flèche associée à u pointe vers A, cela signifie uniquement que :

$$u_A = u_B + u$$

- u_A est supérieur à u_B si, et seulement si u est > 0 .
- u_A est inférieur à u_B si, et seulement si u est < 0 .

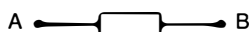
3) La flèche associée à une d.d.p. $u = u_A - u_B$ n'est pas de nature vectorielle dans la mesure où il n'y a aucune relation entre sa longueur (qui représente la distance entre A et B) et la valeur absolue de u .

Dipôles électriques linéaires

1 Généralités

1.1 Définition

On appelle dipôle électrique ou électrocinétique un dispositif électrique quelconque qui présente deux bornes A et B permettant de le relier à un circuit extérieur. Un dipôle est représenté par le schéma général suivant :



1.2 Classification des dipôles

On distingue deux types de dipôles :

- les récepteurs qui reçoivent de l'énergie du circuit extérieur.
- les générateurs qui en fournissent au circuit extérieur.

Selon ce critère, la nature d'un dipôle peut varier d'un instant à l'autre, ou dépendre de l'utilisation que l'on en fait : par exemple, une pile rechargeable se comporte tantôt comme un générateur, tantôt comme un récepteur.

1.3 Caractéristiques u , i et i , u

On peut étudier expérimentalement les propriétés d'un dipôle, en faisant varier la d.d.p. entre ses bornes, et en mesurant l'intensité i du courant qui le traverse.

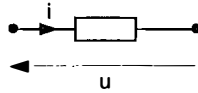
- la courbe $u = u(i)$ est appelée caractéristique tension-courant du dipôle ou simplement caractéristique u , i .
- la courbe $i = i(u)$ est appelée caractéristique courant-tension, ou caractéristique i , u .

Un dipôle dont les caractéristiques passent par l'origine est qualifié de passif : ce dipôle n'est parcouru par aucun courant lorsque la tension entre ses bornes est nulle. Nous nous limiterons dans cet ouvrage à l'étude des dipôles dont les caractéristiques sont linéaires.

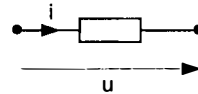
1.4 Conventions récepteur et générateur

Les caractéristiques d'un dipôle peuvent être tracées en orientant les flèches associées à u et à i en sens inverses ou en les orientant dans le même sens. Ce choix doit toujours être clairement précisé, afin d'éviter toute ambiguïté.

- En convention récepteur, les 2 flèches sont de sens opposés.



- En convention générateur, les 2 flèches sont de même sens.



1.5 Énergie reçue par un dipôle

Considérons un dipôle de bornes A et B, orienté de A vers B, et traversé par une charge dq entre les instants t et $t + dt > t$.



Au chapitre précédent, nous avons montré que le travail de la force électrique ne dépend que des potentiels u_A et u_B aux bornes du dipôle :

$$dW = dq(u_A - u_B)$$

On peut donc envisager deux cas :

- si dW est positif, le travail de la force électrique est moteur : le dipôle reçoit de l'énergie ; d'après la définition précédente, c'est donc un récepteur à l'instant t .
- si dW est négatif, le travail de la force électrique est résistant : le dipôle fournit à la charge dq l'énergie $|dW|$ nécessaire à son déplacement de A à B ; c'est donc un générateur à l'instant t .

1.6 Puissance reçue par un dipôle

La puissance instantanée de la force électrique à laquelle est soumise la charge dq est le quotient :

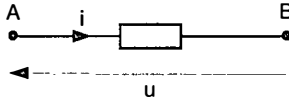
$$p = \frac{dW}{dt} = \frac{dq}{dt}(u_A - u_B)$$

Posons : $i = \frac{dq}{dt}$, et : $u = u_A - u_B$

La puissance reçue par le dipôle s'écrit alors :

$$p = u i$$

Le dipôle ayant été orienté par hypothèse de A vers B, la tension u se trouve associée à une flèche dirigée de B vers A, de sens inverse à celle de i .

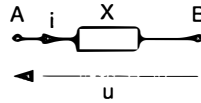


L'intervalle de temps dt étant toujours positif, le signe de p est le même que celui de dW . Le raisonnement précédent permet donc de dégager un critère simple pour distinguer un récepteur d'un générateur :

Lorsque les flèches associées à u et à i sont de sens opposés, il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- $u \cdot i > 0$ à l'instant $t \leftrightarrow X$ est un récepteur à cet instant.

- $u \cdot i < 0$ à l'instant $t \leftrightarrow X$ est un générateur à cet instant.

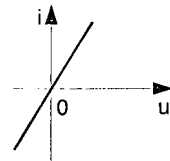
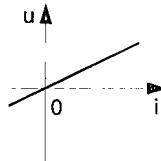
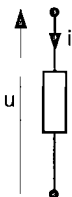


2 Caractéristiques des dipôles linéaires parfaits

2.1 Résistor ou élément résistif

2.1.1. CARACTÉRISTIQUES u, i ET i, u

Les caractéristiques u, i et i, u d'un résistor, tracées en orientant en sens inverses les flèches associées à u et i , sont linéaires, de pentes positives, et passent par l'origine 0.



On peut traduire ce résultat par la loi d'Ohm :

$$u = Ri \Leftrightarrow i = Gu$$

La résistance R , exprimée en ohms (Ω), mesure la pente de la caractéristique u, i ; elle est toujours positive.

La conductance G , exprimée en ohms⁻¹ ou siemens, mesure la pente de la caractéristique i, u ; elle est toujours positive.

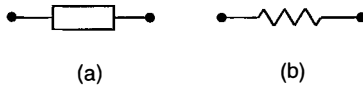
La conductance d'un élément résistif est l'inverse de sa résistance.

Attention :

La loi d'Ohm ne s'écrit sous la forme : $u = Ri$ ou $i = Gu$ qu'à la condition d'orienter en sens inverses les flèches associées à u et i . Si tel n'est pas le cas, il faut l'écrire : $u = - Ri$ ou $i = - Gu$

2.1.2. REPRÉSENTATION

Un résistor est représenté par l'un ou l'autre des symboles suivants :



Nous utiliserons ici le symbole (a).

2.1.3. PUISSANCE ET ÉNERGIE ABSORBÉES

La puissance absorbée par un résistor a pour expression :

$$p = u i$$

soit, en utilisant la loi d'Ohm :

$$p = R i^2 = G u^2$$

On remarque que cette puissance est toujours positive : un résistor se comporte à tout moment comme un récepteur. L'énergie absorbée par un résistor pendant un temps dt , et dissipée par effet Joule vaut dans ces conditions :

$$dW = Pdt = Ri^2 dt = Gu^2 dt$$

Remarque :

La puissance absorbée est nulle dans les 2 cas extrêmes suivants :

- $R = 0 \rightarrow u = 0$ (court-circuit)
- $R = \infty \rightarrow i = 0$ (circuit ouvert)

2.2 Source de tension indépendante idéale

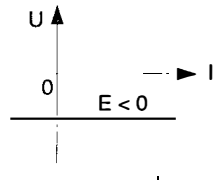
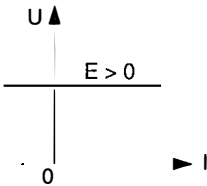
2.2.1. DÉFINITION ET CARACTÉRISTIQUE u, i

Une source de tension indépendante est un dipôle qui maintient entre ses bornes une d.d.p. $u = e$ appelée f.é.m., indépendante du courant qui le traverse.

Attention :

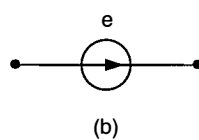
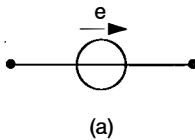
La f.é.m. d'une source de tension est une quantité algébrique.

De ce fait, la caractéristique U, I d'une source de tension continue de f.é.m. E peut se présenter sous l'une ou l'autre des formes suivantes :



2.2.2. REPRÉSENTATION

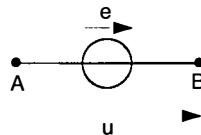
On représente une source de tension indépendante par l'un des symboles ci-dessous :



Nous utiliserons ici le symbole (a). La flèche associée à e a même signification que celle qui est associée à toute d.d.p. ; elle indique uniquement que le potentiel de la borne vers laquelle elle pointe est égal à celui de l'autre borne augmenté de e :

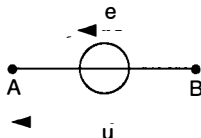
- flèche orientée de A vers B :

$$u = u_B - u_A = e$$



- flèche orientée de B vers A :

$$u = u_A - u_B = e$$



Attention :

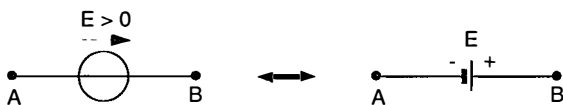
- la flèche associée à e ne pointe pas nécessairement vers la borne de potentiel le plus élevé.
- le sens de cette flèche est indépendant de l'orientation du dipôle, autrement dit du sens > 0 choisi pour le courant.

2.2.3. SCHÉMA ÉQUIVALENT POUR UNE SOURCE DE TENSION CONTINUE

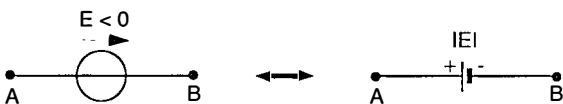
Lorsque la f.é.m. d'une source de tension est une constante E , il est possible de préciser la polarité de ses bornes A et B, à condition de connaître le signe de E . En effet, dans le premier cas envisagé (flèche orientée de A vers B) :

$$u_B = u_A + E$$

- si E est > 0 , u_B est supérieur à u_A ; le dipôle peut être représenté comme suit :



- si E est < 0 , u_B est inférieur à u_A ; on a donc l'équivalence suivante :

**2.3 Source de courant indépendante idéale****2.3.1. DÉFINITION ET CARACTÉRISTIQUE i, u**

Une source de courant indépendante est un dipôle dont le débit η (éta) est indépendant de la d.d.p. entre ses bornes.

Attention :

Le débit d'une source de courant est une quantité algébrique.

De ce fait, la caractéristique I,U d'une source de courant continu de débit H (êta majuscule) peut se présenter sous l'une ou l'autre des formes suivantes :



2.3.2. REPRÉSENTATION

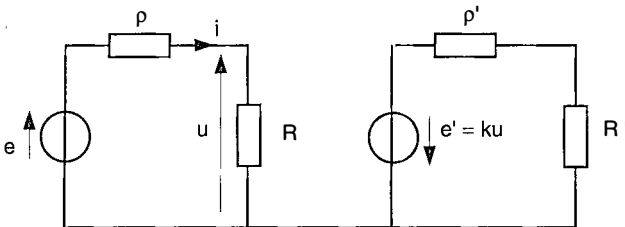
On représente une source de courant indépendante par l'un des symboles suivants :



Nous utiliserons ici le symbole (a). La flèche associée à η indique le sens dans lequel le débit est repéré.

2.4 Sources contrôlées ou liées

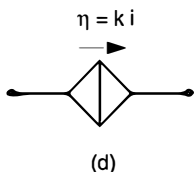
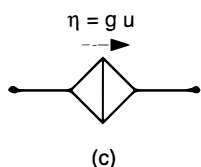
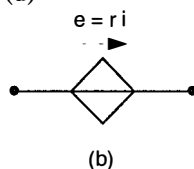
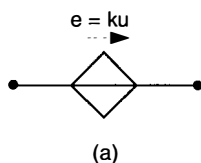
Une source est dite contrôlée ou liée lorsque sa f.é.m. ou son débit dépend d'un signal extérieur appelé signal de contrôle. Par exemple, dans le réseau représenté ci-dessous, correspondant à un amplificateur linéaire, la f.é.m. e' est proportionnelle à la tension u constituant le signal de contrôle de cette source.



Nous nous limiterons ici aux sources contrôlées linéaires, dont la f.é.m. e ou le débit η est proportionnel au signal de contrôle. Nous conviendrons de représenter ces sources par des symboles analogues à ceux des sources indépendantes, obtenus en remplaçant les cercles par des losanges. L'intérêt de ces notations apparaîtra lorsque nous étudierons le théorème de Thévenin.

D'une manière générale, on peut donc distinguer quatre types de sources contrôlées linéaires :

- source de tension contrôlée par une tension (a)
- source de tension contrôlée par un courant (b)
- source de courant contrôlée par une tension (c)
- source de courant contrôlée par un courant (d)



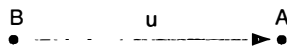
Dans ces relations, k est un coefficient de proportionnalité sans dimension ; r et g ont respectivement la dimension d'une résistance et d'une conductance, mais ne représentent généralement pas la valeur d'un élément résistif du circuit.

Énoncés des exercices

Calcul de tensions

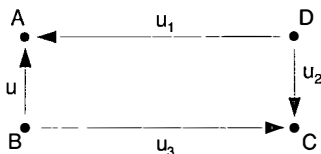
EXERCICE 2.1 :

Calculez u_A à l'instant t , sachant que $u = -2 \text{ V}$ et $u_B = 5 \text{ V}$.



EXERCICE 2.2 :

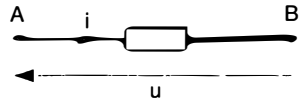
Calculez u à l'instant t , sachant que $u_1 = 1 \text{ V}$, $u_2 = 2 \text{ V}$, $u_3 = -3 \text{ V}$.



Puissance reçue par un dipôle

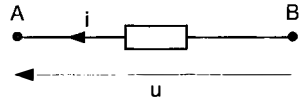
EXERCICE 2.3 :

A l'instant t , on mesure $i = 1 \text{ mA}$, $u = -3 \text{ V}$.
Le dipôle est-il un générateur ou un récepteur ?



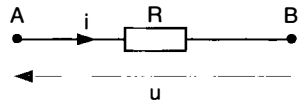
EXERCICE 2.4 :

A l'instant t , on a $i = -2 \text{ mA}$, $u = 4 \text{ V}$.
Le dipôle est-il un récepteur ou un générateur ?



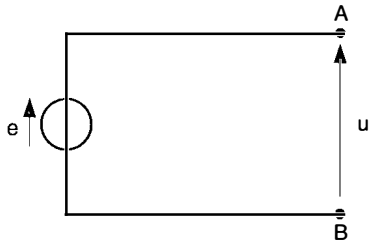
EXERCICE 2.5 :

u est positive à l'instant t . Quel est à cet instant le signe de i ? Montrez que la puissance absorbée par un élément résistif est toujours positive.



EXERCICE 2.6 :

La f.é.m. de la source de tension, exprimée en volts a pour expression :
 $e = 4 \cos \omega t$. Calculez u_A à l'instant $t = T/4$ sachant que u_B est constant et égal à 3 V.



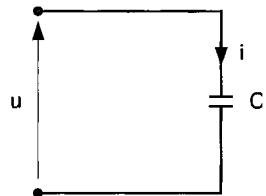
EXERCICE 2.7 :

On applique une tension sinusoïdale $u = 2 \cos \omega t$, exprimée en volts, aux bornes d'un condensateur de capacité C . L'intensité du courant qui le parcourt a pour expression :

$$i = C \frac{du}{dt}$$

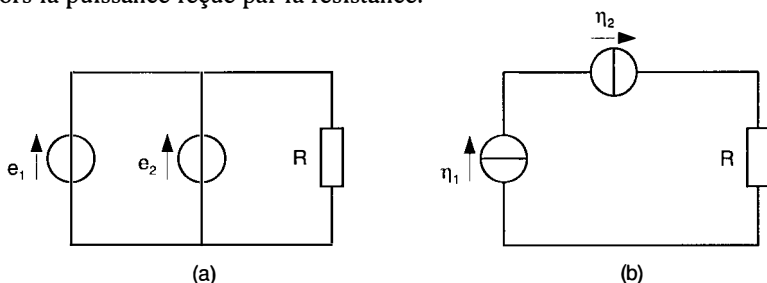
a) calculez la puissance reçue par le condensateur à l'instant t .

b) calculez cette puissance pour $t_1 = 0$, $t_2 = \pi / 8 \omega$, et $t_3 = 5 \pi / 8 \omega$.



EXERCICE 2.8 :

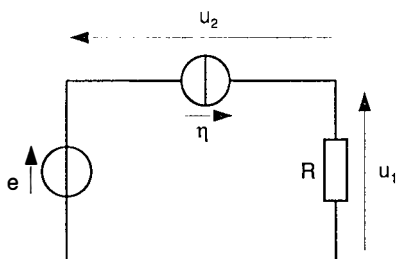
A quelles conditions peut-on envisager les associations suivantes ? Calculez alors la puissance reçue par la résistance.

**EXERCICE 2.9 :**

a) Calculez les tensions u_1 et u_2 . Déterminez la puissance reçue par la résistance, ainsi que les puissances fournies par les 2 sources.

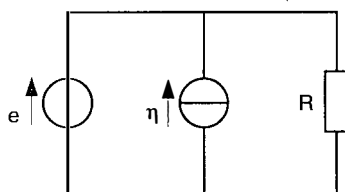
b) Application numérique : $R = 10 \Omega$; $\eta = 1 \text{ A}$; $e = 5 \text{ V}$.

c) Application numérique : $R = 10 \Omega$; $\eta = -1 \text{ A}$; $e = 5 \text{ V}$.

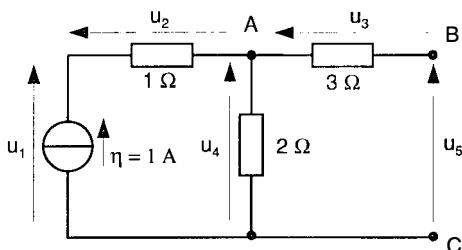
**EXERCICE 2.10 :**

a) Calculez la puissance reçue par la résistance, et successivement les puissances fournies par la source de courant et la source de tension.

b) Application numérique : $R = 10 \Omega$; $\eta = -1 \text{ A}$; $e = 5 \text{ V}$.

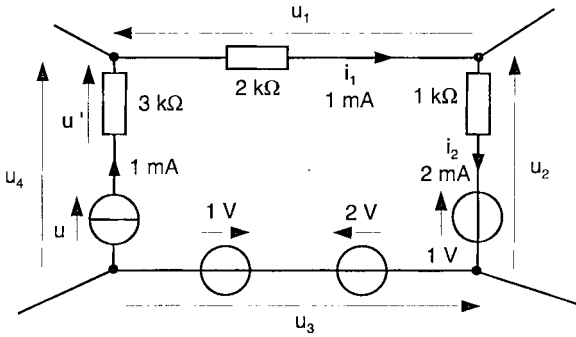
**EXERCICE 2.11 :**

Quel est le courant qui traverse le dipôle AB ? Calculez numériquement les 5 tensions.

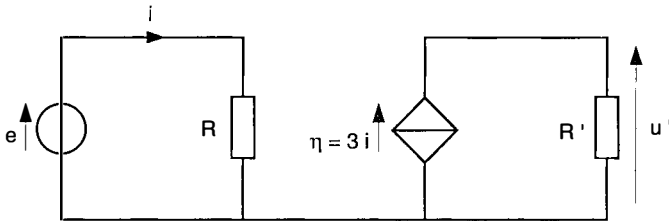


EXERCICE 2.12 :

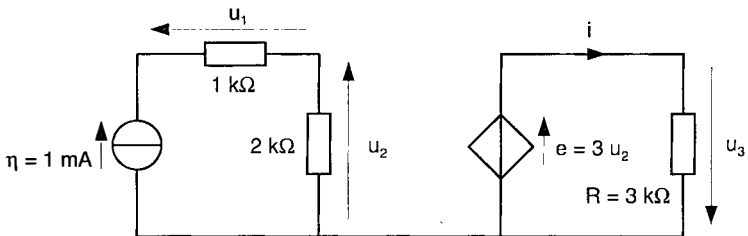
Calculez successivement les tensions u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , puis la tension u aux bornes de la source de courant.

**EXERCICE 2.13 :**

Calculez successivement i et u' pour $e = 1 \text{ V}$; $R = 1 \text{ k}\Omega$; $R' = 2 \text{ k}\Omega$.

**EXERCICE 2.14 :**

Calculez successivement u_1 , u_2 , u_3 , et i .



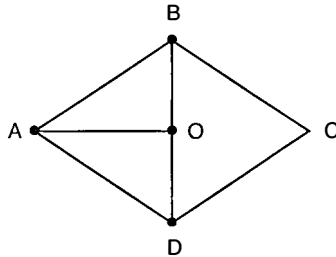
Lois de Kirchhoff : applications simples

1 Définitions

Un réseau électrique est un ensemble de dipôles reliés par des conducteurs de résistances négligeables. D'une manière générale, on distingue dans un réseau :

- des nœuds, qui sont des points communs à 3 dipôles au moins.
- des branches, qui sont des éléments de circuits compris entre 2 nœuds.
- des mailles, qui sont des circuits fermés ne passant qu'une seule fois par un nœud donné.

Par exemple, le circuit ci-dessous comprend 4 nœuds (A, B, D, O), et 6 branches (AB, AO, AD, OB, OD, BCD).



Ce réseau comprend également 7 mailles : ABOA, AODA, ABODA, BCDB, ABCDA, ABCDOA, ADCBOA.

2 Lois de Kirchhoff

2.1 Première loi : loi des nœuds

La première loi de Kirchhoff traduit le fait que les charges électriques ne peuvent pas s'accumuler au cours du temps en un point quelconque d'un

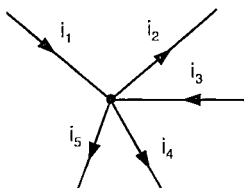
réseau. Pour cette raison, la charge électrique totale aboutissant à un nœud pendant un temps dt , est nécessairement égale à la charge quittant ce nœud pendant le même temps. On peut exprimer ce résultat par la relation explicite :

$$\boxed{\sum i_{\text{entrant}} = \sum i_{\text{sortant}}}$$

Exemple :

$$\sum i_{\text{entrant}} = i_1 + i_3$$

$$\sum i_{\text{sortant}} = i_2 + i_4 + i_5$$



par conséquent :

$$i_1 + i_3 = i_2 + i_4 + i_5$$

La première loi de Kirchhoff peut également s'écrire sous la forme :

$$\sum i_{\text{entrant}} - \sum i_{\text{sortant}} = 0$$

Les courants entrant sont alors affectés du signe +, et les courants sortant du signe -. Cette remarque justifie la notation que nous utiliserons désormais pour exprimer cette loi :

$$\boxed{\sum \underset{\rightarrow}{i} = 0}$$

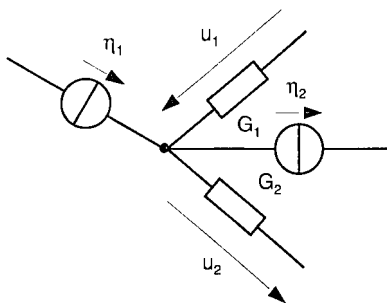
“Somme des courants, comptés positivement vers le nœud, égale à zéro”

Le symbole \rightarrow est équivalent :

- à un signe + quand i est dirigé vers le nœud,
- à un signe - quand i est dirigé en sens inverse.

Lorsque les inconnues sont les tensions aux bornes des branches aboutissant au nœud considéré, la première loi de Kirchhoff permet de relier ces tensions aux débits des sources de courant.

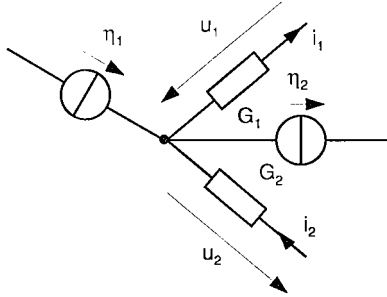
Considérons par exemple le schéma ci-contre, comprenant 2 sources de courant et 2 éléments résistifs de conductances G_1 et G_2 . On suppose connus les débits η_1 et η_2 des sources, ainsi que les d.d.p. u_1 et u_2 aux bornes de G_1 et G_2 .



Le sens des courants i_1 et i_2 traversant G_1 et G_2 est déterminé, d'après la loi d'Ohm, par celui des tensions u_1 et u_2 :

$i_2 = G_2 u_2$ est dirigé vers le nœud.

$i_1 = G_1 u_1$ est dirigé en sens inverse.



Complétons la figure en représentant ces courants, et explicitons la loi des nœuds :

$$\eta_1 - \eta_2 + i_2 - i_1 = 0$$

soit :

$$\eta_1 - \eta_2 = i_1 - i_2 = G_1 u_1 - G_2 u_2$$

On remarque que η_1 et u_1 , dont les flèches sont dirigées vers le nœud sont affectés du signe +, alors que η_2 et u_2 , dont les flèches sont dirigées en sens inverse, sont affectés du signe -.

Ce résultat nous conduit à la relation générale suivante, valable en tout nœud où n'aboutissent que des sources de courant et des résistors :

$$\sum_{\rightarrow \bullet} G u = \sum_{\bullet \rightarrow} \eta$$

Le symbole $\rightarrow \bullet$ est équivalent :

- à un signe + pour une d.d.p. ou un courant dirigé vers le nœud.
- à un signe - pour une d.d.p. ou un courant dirigé en sens inverse.

Remarque :

Dans le cas particulier où des sources de tension sont également connectées au nœud, le second membre inclut la totalité des courants qui y arrivent à travers les sources (sources de courant et sources de tension).

2.2 Deuxième loi : loi des mailles

La deuxième loi de Kirchhoff découle du fait que le déplacement d'une charge électrique le long d'un circuit fermé ne nécessite aucune dépen-

se d'énergie. Pour cette raison :

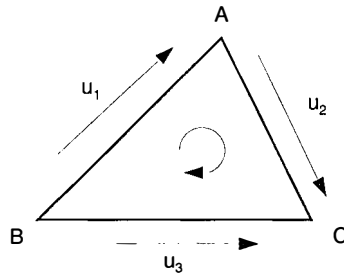
La somme algébrique des tensions le long d'une maille est nulle.

Pour écrire cette loi, on procède de la manière suivante :

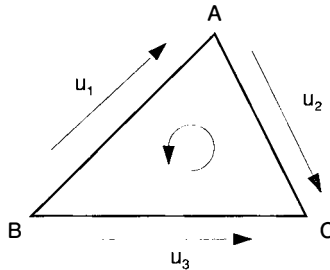
- on choisit arbitrairement un sens de parcours sur la maille, que l'on matérialise par une flèche.
- on affecte du signe + les tensions dirigées dans ce sens.
- on affecte du signe - les tensions dirigées en sens inverse.

Considérons, par exemple, la maille triangulaire ci-dessous, orientée dans le sens des aiguilles d'une montre. Les tensions u_1 et u_2 sont affectées du signe +, u_3 du signe - :

$$u_1 + u_2 - u_3 = 0$$



Choisissons maintenant comme sens de parcours le sens trigonométrique :



on aboutit à la même relation que précédemment : $-u_1 - u_2 + u_3 = 0$.

On généralise ce résultat sous la forme :

$$\sum_{\rightarrow M} u = 0$$

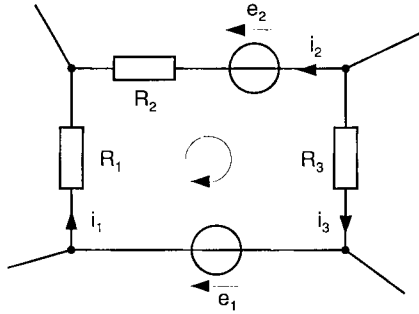
“Somme des tensions comptées positivement dans le sens de la maille égale à zéro”

Le symbole \rightarrow_M est équivalent :

- à un signe + pour une tension dirigée dans le sens de parcours de la maille,
- à un signe - pour une tension dirigée en sens inverse.

Lorsque les inconnues sont les intensités dans les branches de la maille, la deuxième loi de Kirchhoff permet de les relier aux f.é.m. des sources de tension.

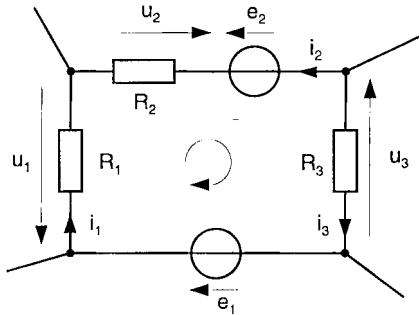
Considérons par exemple la maille ci-dessous orientée dans le sens des aiguilles d'une montre :



On suppose connues les f.é.m. e_1 et e_2 ainsi que les intensités i_1 , i_2 , i_3 . La loi d'Ohm détermine à la fois la valeur des tensions u_1 , u_2 , u_3 aux bornes des éléments résistifs R_1 , R_2 , R_3 , et le sens des flèches associées :

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 i_1 \\ u_2 &= R_2 i_2 \\ u_3 &= R_3 i_3 \end{aligned}$$

Faisons apparaître ces tensions sur la figure, et explicitons la loi des mailles :



on obtient :

$$e_1 - u_1 + u_2 - e_2 - u_3 = 0$$

soit :

$$e_1 - R_1 i_1 + R_2 i_2 - e_2 - R_3 i_3 = 0$$

et :

$$e_1 - e_2 = R_1 i_1 - R_2 i_2 + R_3 i_3$$

On remarque que e_1 , i_1 , et i_3 dont les flèches sont dirigées dans le sens de parcours de la maille, sont affectés du signe +, alors que e_2 et i_2 , dont les flèches sont dirigées en sens inverses, sont affectés du signe -.

Pour une maille ne comportant que des sources de tension et des résistors, on peut généraliser ce résultat sous la forme symbolique suivante :

$$\sum R_{\rightarrow M} i = \sum e_{\rightarrow M}$$

Le symbole $\rightarrow M$ est équivalent :

- à un signe + pour une f.é.m. ou un courant dirigé dans le sens de parcours de la maille,
- à un signe - pour une f.é.m. ou un courant dirigé en sens inverse.

Remarque :

Dans le cas particulier où la maille comprend également des sources de courant, le second membre inclut la totalité des tensions aux bornes des sources (sources de tension et sources de courant).

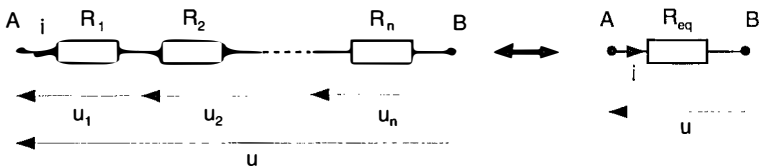
3 Applications simples

3.1 Associations de dipôles

Il est souvent possible de réduire la complexité d'un circuit électrique en remplaçant par un dipôle équivalent une association de dipôles du même type.

3.1.1. ASSOCIATION DE RÉSISTORS EN SÉRIE

Considérons le dipôle ci-dessous formé par l'association de n résistors en série entre deux bornes A et B.



Lorsque ce dipôle est parcouru par un courant d'intensité i , la tension u qui apparaît entre ses bornes, peut se décomposer en :

$$u = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

La loi d'Ohm permet de relier ces tensions au courant et aux résistances :

$$\begin{aligned} u &= R_1 i + R_2 i + \dots + R_n i \\ &= (R_1 + R_2 + \dots + R_n) i \end{aligned}$$

Posons :

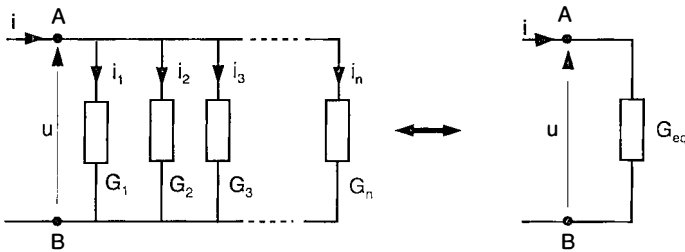
$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

On obtient alors la relation $u = R_{eq} i$ qui montre que le dipôle considéré est équivalent à la résistance unique R_{eq} . On en déduit la loi d'association recherchée :

Les résistances en série s'additionnent

3.1.2. ASSOCIATION DE RÉISTORS EN PARALLÈLE

Considérons le dipôle de bornes A et B représenté ci-dessous, formé par l'association en parallèle de n résistors de conductances G_1, G_2, \dots, G_n .



Lorsqu'on applique une tension $u = u_A - u_B$ entre ses deux bornes, il apparaît dans les résistors des courants :

$$i_1 = G_1 u, i_2 = G_2 u, \dots, i_n = G_n u$$

dont la somme est égale, d'après la loi des nœuds, au courant i qui pénètre dans le dipôle par la borne A :

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_n = (G_1 + G_2 + \dots + G_n) u$$

Posons :

$$G_{eq} = G_1 + G_2 + \dots + G_n$$

On obtient alors la relation $i = G_{eq} u$ qui montre que le dipôle considéré est équivalent à un résistor unique de conductance G_{eq} :

Les conductances en parallèle s'additionnent.

Remarque :

- la loi d'association précédente peut s'écrire sous une forme équivalente faisant intervenir les résistances :

$$G_{\text{eq}} = \frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

- dans le cas particulier, très fréquent, d'une association en parallèle de deux résistors, le second membre se limite à deux termes :

$$G_{\text{eq}} = G_1 + G_2 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_{\text{eq}}}$$

soit :

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$$

On en déduit la relation très importante :

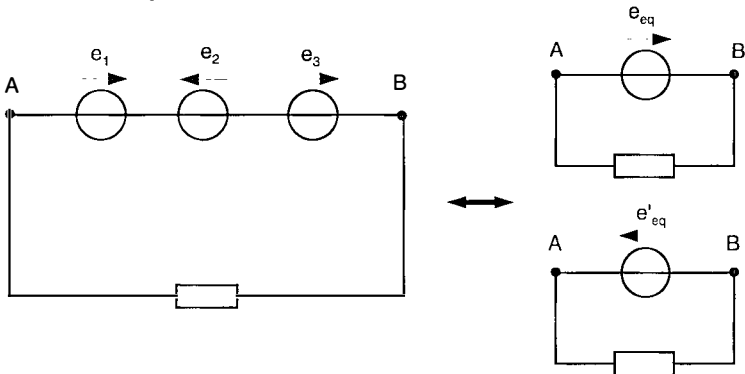
$$\boxed{(R_1 // R_2) = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

3.1.3. ASSOCIATION DE SOURCES DE TENSION EN SÉRIE

Une association série de n sources de tension de f.é.m. e_1, e_2, \dots, e_n maintient entre ses bornes A et B une tension égale à la somme algébrique de ces f.é.m. Elle équivaut par conséquent à une source de tension unique. Dans l'exemple ci-dessous :

$$e_{\text{eq}} = e_1 - e_2 + e_3 = u_B - u_A$$

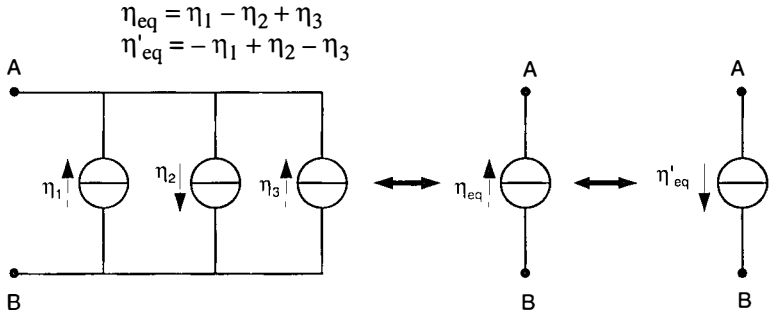
$$e'_{\text{eq}} = -e_1 + e_2 - e_3 = u_A - u_B$$



Les f.é.m. en série s'additionnent algébriquement.

3.1.4. ASSOCIATION DE SOURCES DE COURANT EN PARALLÈLE

Une association parallèle de n sources de courant de débits $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ entre deux bornes A et B est équivalente à une source de courant unique. Dans l'exemple ci-dessous :



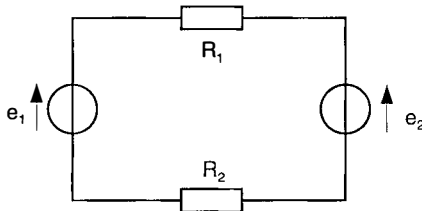
Les débits en parallèle s'additionnent algébriquement.

3.2 Circuits à une maille et circuits à deux nœuds

3.2.1. ÉTUDE D'UN CIRCUIT A UNE MAILLE

Un réseau à maille unique est un circuit fermé, constitué de dipôles placés en série. Il est caractérisé par le fait que tous ces dipôles sont parcourus par le même courant.

Considérons par exemple le circuit suivant, comprenant deux sources de tension de f.é.m. e_1 et e_2 et 2 résistors R_1 et R_2 .



Calculons l'intensité du courant i dans ce circuit en appliquant la loi des mailles sous la forme $\sum_{\rightarrow M} u = 0$ tout d'abord, puis sous la forme :

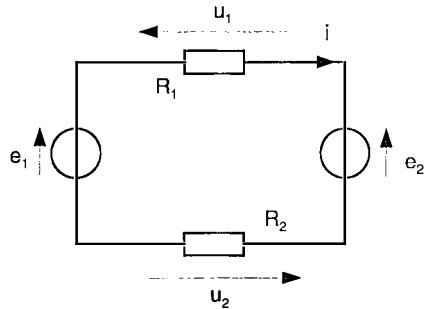
$$\sum_{\rightarrow M} R i = \sum_{\rightarrow M} e .$$

Première méthode :

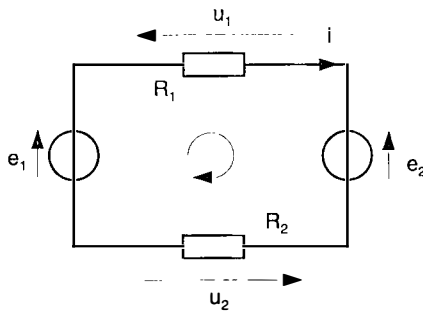
a) Le sens de i étant à priori inconnu, on oriente arbitrairement ces 4 dipôles, en tournant par exemple dans le sens de la flèche de e_1 . Il est bien entendu que si le résultat du calcul montre que i est positif à un instant donné, cela signifie que le courant conventionnel circule effectivement dans le sens de la flèche de e_1 , alors que si i est négatif, il circule effectivement en sens inverse.

b) On matérialise les tensions u_1 et u_2 aux bornes des résistors par des flèches dont le sens est déterminé par la loi d'Ohm :

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 i \\ u_2 &= R_2 i \end{aligned}$$



c) On choisit arbitrairement un sens de parcours sur la maille, en prenant par exemple le sens choisi pour le courant.



d) On explicite la loi des mailles $\sum_{\rightarrow M} u = 0$: $e_1 - u_1 - e_2 - u_2 = 0$
soit : $e_1 - e_2 = u_1 + u_2 = (R_1 + R_2) i$.

On en déduit la valeur de l'intensité :

$$i = \frac{e_1 - e_2}{R_1 + R_2}$$

Le courant conventionnel circule dans le sens choisi si $e_1 > e_2$, et en sens inverse si $e_1 < e_2$.

Deuxième méthode :

Le calcul de l'intensité du courant dans le circuit précédent est beaucoup plus rapide si on utilise la loi des mailles sous la forme :

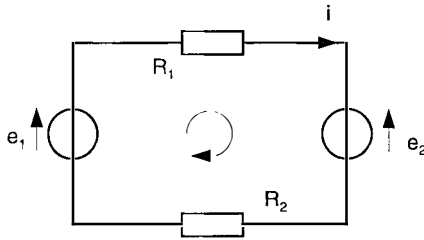
$$\sum R i = \sum e$$

Il est en effet inutile de matérialiser, dans ce cas, les tensions aux bornes des éléments résistifs.

- On choisit arbitrairement un sens positif pour le courant,
- On choisit arbitrairement un sens de parcours sur la maille,
- On explicite la loi des mailles.

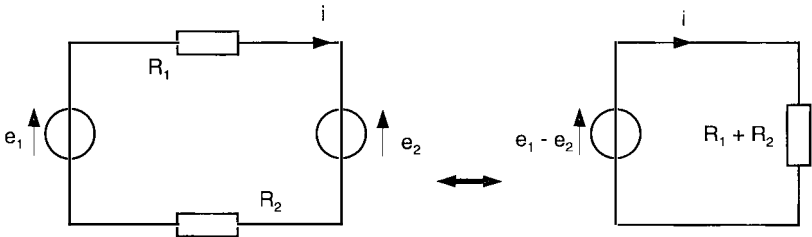
Si on effectue en a) et b) les mêmes choix que précédemment, on obtient directement la relation recherchée :

$$e_1 - e_2 = (R_1 + R_2) i$$



Remarque :

Cette relation montre que le circuit étudié se réduit à une maille comprenant en série une source de tension de f.é.m. $e_1 - e_2$, en série avec une résistance $R_1 + R_2$.



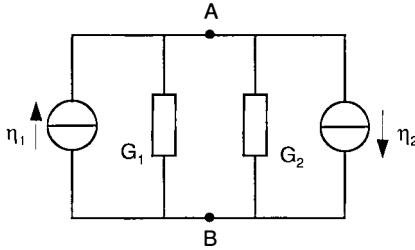
Cette équivalence pouvait se déduire de la simple application des lois d'association des sources de tension et des résistors.

3.2.2. ÉTUDE D'UN CIRCUIT A DEUX NŒUDS

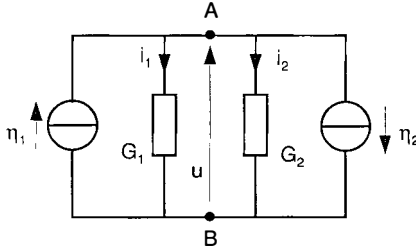
Un circuit à 2 nœuds est constitué de dipôles placés en parallèle, qui présentent de ce fait une même tension u entre leurs bornes. On étudie un tel circuit par application de la loi des nœuds sous la forme :

$$\sum \vec{i} = 0 \quad \text{ou :} \quad \sum G \vec{u} = \sum \vec{\eta}$$

Considérons par exemple le circuit suivant comprenant deux sources de courant de débits η_1 et η_2 , et 2 éléments résistifs de conductances G_1 et G_2 .



a) On définit la tension u entre les nœuds en orientant sa flèche vers l'un des nœuds, par exemple A :



b) Le choix réalisé détermine le sens des courants i_1 et i_2 dans G_1 et G_2 .

c) Ces courants doivent être représentés sur la figure lorsqu'on explicite la loi des nœuds sous la forme $\sum \vec{i} = 0$. On obtient alors en A :

$$\eta_1 - \eta_2 - i_1 - i_2 = 0$$

soit :

$$\eta_1 - \eta_2 = i_1 + i_2 = (G_1 + G_2) u$$

On en déduit la d.d.p. entre A et B :

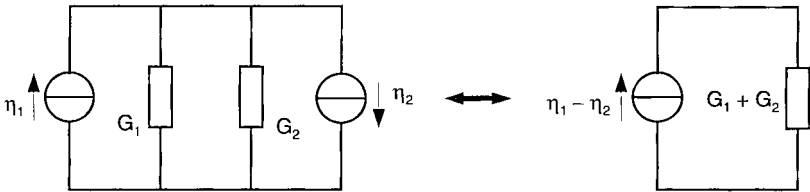
$$u = \frac{\eta_1 - \eta_2}{G_1 + G_2}$$

Lorsqu'on utilise la loi des nœuds sous la forme $\sum \vec{G} u = \sum \vec{\eta}$, il est inutile de matérialiser les courants dans les conductances. On obtient directement la relation recherchée :

$$\eta_1 - \eta_2 = (G_1 + G_2)u$$

Remarque :

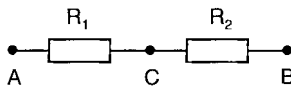
Cette relation traduit simplement la loi d'Ohm pour un élément résistif de conductance $G_1 + G_2$, parcouru par un courant $\eta_1 - \eta_2$. Ce résultat pouvait être obtenu en transformant le circuit étudié au moyen des lois d'association en parallèle des sources de courant et des conductances.



3.3 Diviseurs de tension et de courant

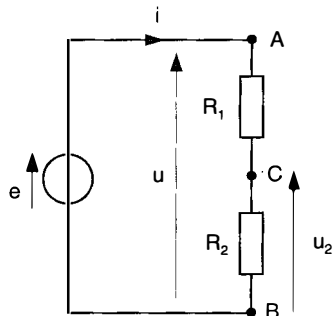
3.3.1. DIVISEUR DE TENSION

Considérons l'association série de deux résistors R_1 et R_2 entre deux bornes A et B.



Si on applique entre ces deux bornes une tension $u = u_A - u_B$ en les reliant par exemple à une source de tension de f.é.m. $u = e$, il apparaît un courant d'intensité i , orienté de A vers B dont la valeur algébrique est donnée par la loi d'Ohm :

$$u = e = (R_1 + R_2) i$$



La tension u_2 qui apparaît dans ces conditions aux bornes de R_2 a pour valeur :

$$u_2 = R_2 i$$

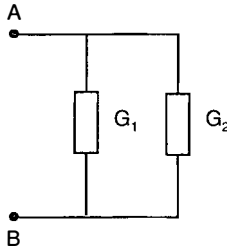
soit :

$$u_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u$$

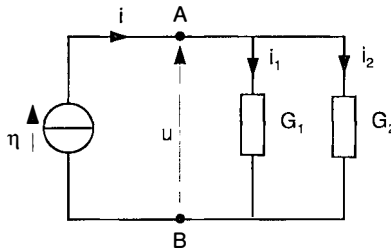
Les d.d.p. u et u_2 , mesurées à partir du point commun B, sont de même signe : la tension aux bornes de R_2 représente donc une fraction de celle qui est appliquée aux bornes du montage ; celui-ci constitue un diviseur de tension.

3.3.2. DIVISEUR DE COURANT

Considérons l'association de deux résistors de conductances G_1 et G_2 entre deux bornes A et B.



Désignons par i l'intensité qui pénètre par la borne A lorsque ce montage est relié à un dipôle actif, par exemple à une source de courant de débit $\eta = i$.



Écrivons la loi des nœuds en A :

$$\eta = i = G_1 u + G_2 u$$

ainsi que la loi d'Ohm pour les deux résistors :

$$\begin{aligned}i_1 &= G_1 u \\i_2 &= G_2 u\end{aligned}$$

On peut exprimer i_1 ou i_2 en fonction de i en éliminant u entre ces relations. Par exemple :

$$i_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} i$$

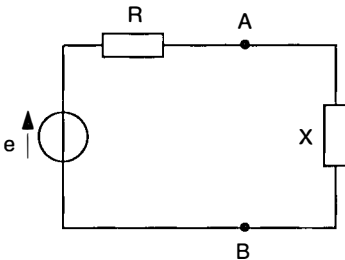
i_2 est une fraction de l'intensité totale i : ce montage constitue un diviseur de courant. En pratique, on écrit le plus souvent :

$$i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i$$

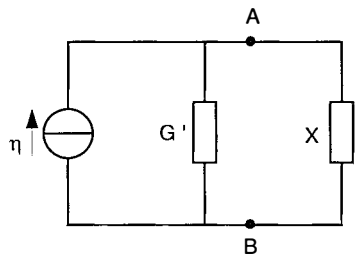
3.4 Dualité tension-courant

Il existe une analogie évidente entre les circuits séries comportant des sources de tension, et les circuits parallèles comportant des sources de courant. Afin de préciser cette analogie, considérons les deux montages (a) et (b) représentant respectivement :

- une maille formée à partir d'une source de tension de f.é.m. e , d'un résistor de résistance R , et d'un dipôle X de nature quelconque, se comportant en générateur ou en récepteur.
- un circuit à deux nœuds, formé de l'association parallèle du même dipôle X , d'un résistor de conductance G' , et d'une source de courant de débit η .

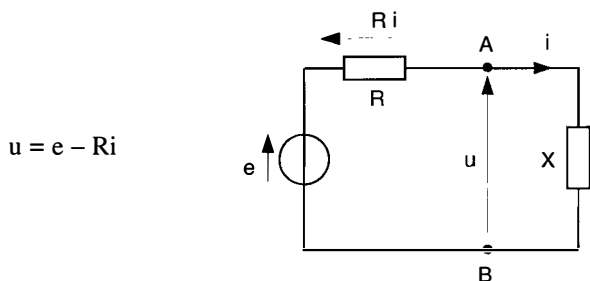


(a)



(b)

Analysons le montage (a) en orientant la flèche de i dans le sens de celle de e : ce choix détermine la tension Ri aux bornes de l'élément résistif, ainsi que la tension $u = u_A - u_B$ aux bornes du dipôle X :

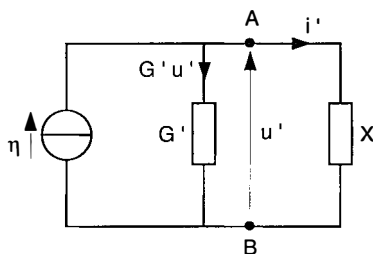


Cette relation permet d'exprimer i en fonction de u :

$$i = \frac{e}{R} - \frac{u}{R}$$

Analysons le montage (b) en posant tout d'abord $u' = u_A - u_B$: ce choix détermine le courant $G'u'$ dans l'élément résistif, ainsi que le courant i' traversant le dipôle X de A vers B :

$$i' = \eta - G'u'$$



Les associations représentées à gauche de A et de B sont strictement équivalentes si les tensions entre leurs bornes sont identiques ($u = u'$) et si les intensités des courants qui les traversent ont même valeur ($i = i'$), quelle que soit la nature et les caractéristiques du dipôle X . Cette équivalence se traduit par la relation :

$$i = \frac{e}{R} - \frac{u}{R} = i' = \eta - G'u'$$

avec $u' = u$

soit :

$$\frac{e}{R} - \frac{u}{R} = \eta - G'u$$

Cette dernière égalité ne peut être satisfaite pour toute valeur de u qu'à la condition que l'on ait simultanément :

$$G' = \frac{1}{R} \quad \eta = \frac{e}{R}$$

Nous n'avons fait aucune hypothèse sur la nature du dipôle X. Ce résultat établit donc que :

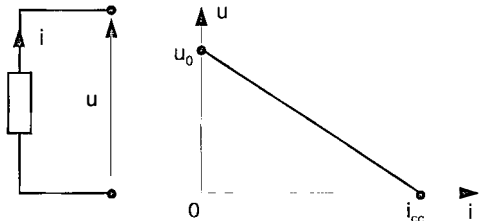
Toute association série d'une source de tension de f.é.m. e avec un résistor de résistance R peut être remplacée par l'association parallèle d'une source de courant de débit $\eta = \frac{e}{R}$ avec le même résistor, et réciproquement.

3.5 Application aux sources réelles

3.5.1. MODÉLISATION

Les sources de tension et de courant dont les caractéristiques s'étendent de $-\infty$ à $+\infty$ sont des dipôles idéaux susceptibles de fournir une puissance infinie à une charge extérieure. La caractéristique d'une source réelle possède nécessairement une extension limitée et peut revêtir des formes très variées.

On désigne sous le nom de générateur, une source réelle dont la caractéristique u, i est linéaire, de pente négative lorsque les flèches associées à u et à i sont de même sens.



Cette caractéristique coupe l'axe des tensions et des courants respectivement en u_0 et i_{cc} :

- u_0 est la d.d.p. correspondant à $i = 0$, appelée tension à vide : c'est la d.d.p. qui apparaît aux bornes du générateur lorsqu'il n'est relié à aucune charge extérieure.
- i_{cc} est le courant correspondant à $u = 0$, appelé courant de court-circuit : c'est le courant circulant dans un conducteur extérieur sans résistance reliant ses 2 bornes.

L'équation de cette caractéristique peut s'écrire sous la forme générale :

$$\frac{u}{u_0} + \frac{i}{i_{cc}} = 1$$

ou sous l'une ou l'autre des formes équivalentes :

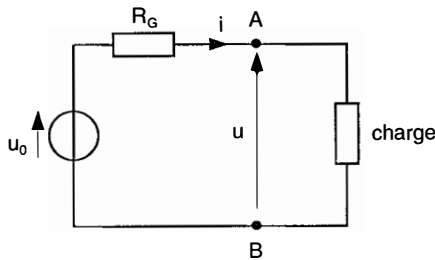
$$\begin{cases} u = u_0 - i \frac{u_0}{i_{cc}} \\ i = i_{cc} - u \frac{i_{cc}}{u_0} \end{cases}$$

Posons : $R_G = \frac{u_0}{i_{cc}}$, et : $G_G = \frac{1}{R_G} = \frac{i_{cc}}{u_0}$

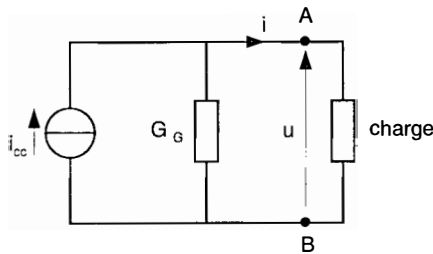
on obtient alors les 2 équations :

$$\begin{cases} u = u_0 - R_G \cdot i \\ i = i_{cc} - G_G \cdot u \end{cases}$$

- la première relation montre que le générateur peut être modélisé par une source de tension de f.é.m. u_0 en série avec une résistance R_G .



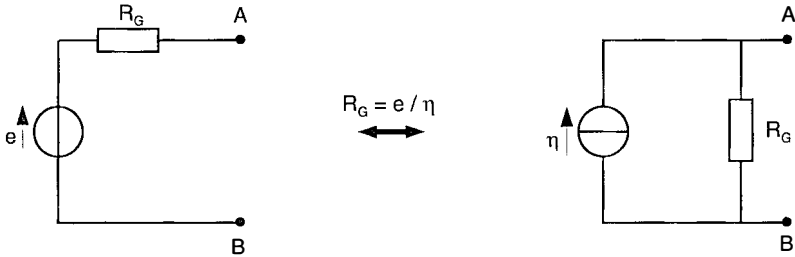
- la deuxième relation montre que le générateur peut être modélisé par une source de courant de débit i_{cc} en parallèle avec un résistor de conductance G_G .



Ces 2 représentations du même dipôle étant équivalentes :

Un générateur peut être modélisé :

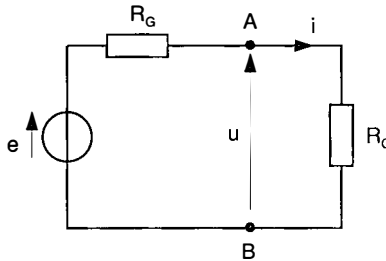
- par une source de tension de f.é.m. e en série avec un résistor de résistance R_G ,
- par une source de courant de débit $\eta = \frac{e}{R_G}$ en parallèle avec le même résistor.



R_G est la résistance interne du générateur.

3.5.2. PUISSANCE DÉLIVRÉE PAR UN GÉNÉRATEUR

Calculons la puissance maximum que peut délivrer un générateur à une charge résistive R_C . Modélisons ce générateur par l'association série (e, R_G).



Orientons le circuit à une maille ci-dessus dans le sens des aiguilles d'une montre, et posons $u = u_A - u_B$.

Les flèches associées à u et à i étant de sens opposés dans R_C , la puissance qu'elle reçoit a pour valeur :

$$p = u \cdot i = R_C i^2 \quad \text{avec : } i = \frac{e}{R_G + R_C}$$

soit :

$$p = \frac{R_C e^2}{(R_G + R_C)^2}$$

Cette fonction de R_C admet un maximum lorsque sa dérivée par rapport à R_C est nulle :

$$\frac{dp}{dR_C} = \frac{e^2(R_G + R_C)^2 - 2R_C e^2(R_G + R_C)}{(R_G + R_C)^4} = 0$$

Ce résultat s'obtient pour $R_G + R_C = 2 R_C$, soit : $R_G = R_C$.

Un générateur de résistance interne R_G débitant dans une charge résistive R_C délivre une puissance maximum lorsque $R_C = R_G$.

On dit, dans ce cas, que le générateur est adapté à la charge. Cette puissance maximum a pour valeur :

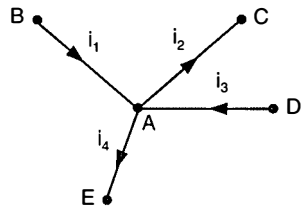
$$p_M = \frac{R_G e^2}{4 R_G^2} \quad \text{soit : } p_M = \frac{e^2}{4 R_G}$$

Énoncés des exercices

Loi des nœuds

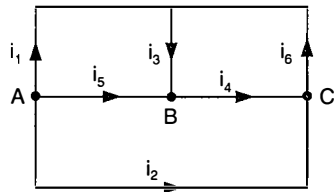
EXERCICE 3.1 :

Calculez i_4 à l'instant t , sachant que $i_1 = -2$ A, $i_2 = 1$ A, $i_3 = 5$ A. Quel est, à cet instant, le sens du courant conventionnel dans la branche AE ?



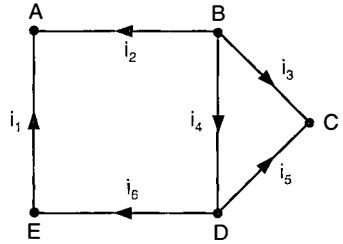
EXERCICE 3.2 :

Exprimez i_5 et i_6 en fonction de i_1 , i_2 , i_3 . Application numérique : $i_1 = 2$ A, $i_2 = -0,5$ A, $i_3 = 1$ A.

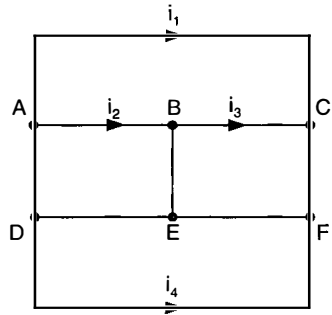


EXERCICE 3.3 :

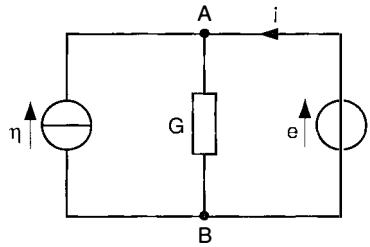
Calculez numériquement i_2, i_3, i_5, i_6 , à l'instant t , sachant que $i_1 = 0,5 \text{ A}$ et $i_4 = -3 \text{ A}$.

**EXERCICE 3.4 :**

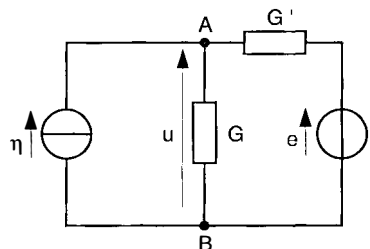
Calculez les courants circulant dans les branches AD, BE, CF, DE et EF en fonction de i_1, i_2, i_3, i_4 .

**EXERCICE 3.5 :**

Exprimez i en fonction de η, e , et G par application de la loi des nœuds en A.

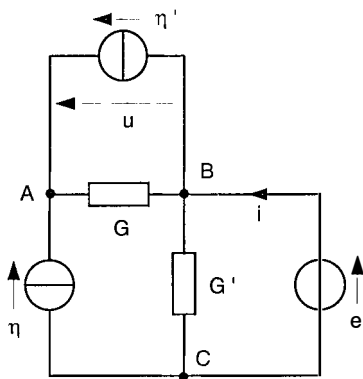
**EXERCICE 3.6 :**

Exprimez la tension u' aux bornes de G' en fonction de u et de e . Calculez ensuite u en fonction de η, e, G, G' par application de la loi des nœuds en A.

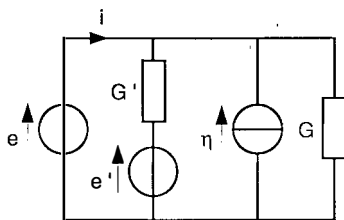


EXERCICE 3.7 :

Explicitiez la loi des nœuds en A, B et C sous la forme $\sum \vec{G} \vec{u} = \sum \vec{\eta}$.
 Additionnez membre à membre les 3 relations obtenues. Quelle conclusion pouvez-vous en tirer ?

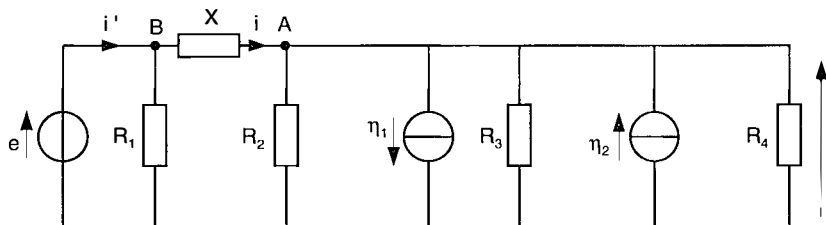
**EXERCICE 3.8 :**

Exprimez i en fonction de η , e , e' , G , G' . A quelle condition ce réseau est-il identique à celui de l'exercice 3.5 ?

**EXERCICE 3.9 :**

On donne : $R_1 = R_2 = 1 \text{ k}\Omega$; $R_3 = R_4 = 2 \text{ k}\Omega$; $e = 5 \text{ V}$; $u = 3 \text{ V}$; $\eta_1 = 4 \text{ mA}$; $\eta_2 = 2 \text{ mA}$. Calculez :

- le courant i qui traverse le dipôle X.
- la puissance reçue par ce dipôle.
- le courant i' débité par la source de tension.

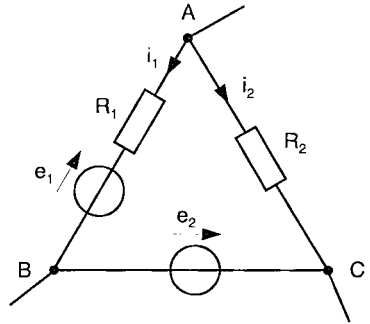
**Loi des mailles****EXERCICE 3.10 :**

a) Explicitiez la deuxième loi de Kirchhoff dans la maille ci-après sous la forme : $\sum_{\rightarrow M} R \vec{i} = \sum_{\rightarrow M} e$.

b) Que devient cette relation si on pose $u_1 = R_1 i_1$, $u_2 = R_2 i_2$? Représentez sur la figure les flèches associées à u_1 et u_2 .

c) Montrez que l'on retrouve la relation précédente si on explicite la loi des mailles sous la forme :

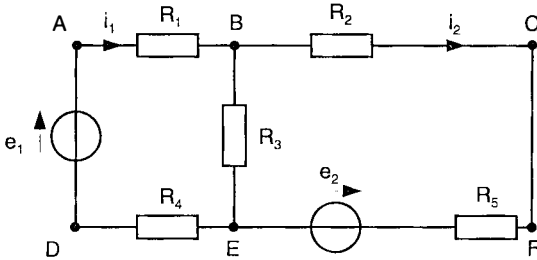
$$\sum_{\rightarrow M} u = 0$$



EXERCICE 3.11 :

a) Calculez le courant qui circule de B vers E en fonction de i_1 et i_2 .

b) Explicitez la deuxième loi de Kirchhoff dans les mailles ABED, BCFE et ACFD.



EXERCICE 3.12 :

On donne :

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 1 \text{ k}\Omega ; \eta = 2 \text{ mA} ;$$

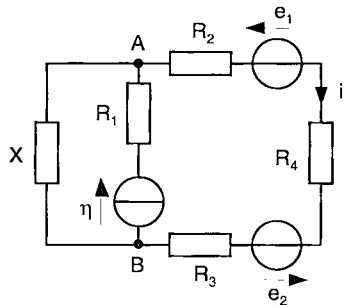
$$i = 1 \text{ mA} ; e_1 = -8 \text{ V} ; e_2 = 2 \text{ V}.$$

Calculez :

a) la tension $u = u_A - u_B$.

b) la d.d.p. aux bornes de la source de courant.

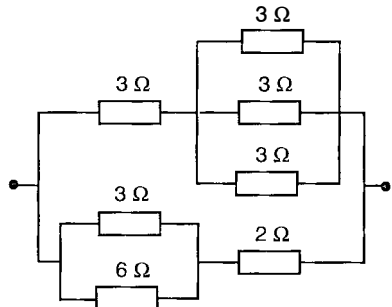
c) la puissance reçue par le dipôle X.



Associations de résistors

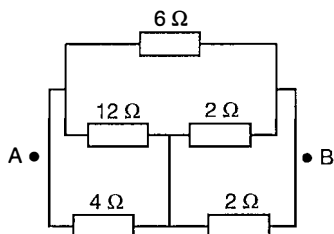
EXERCICE 3.13 :

Calculez la résistance équivalente au dipôle représenté ci-contre.

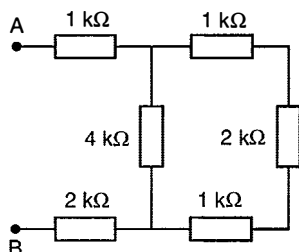


EXERCICE 3.14 :

Calculez la résistance équivalente au dipôle AB.

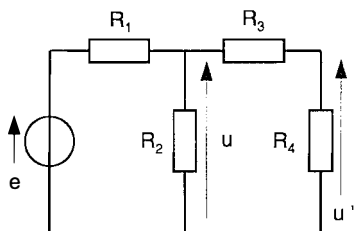
**EXERCICE 3.15 :**

Calculez la résistance équivalente au dipôle AB.

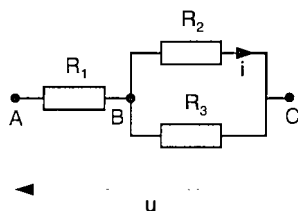
**Diviseurs de tension et de courant****EXERCICE 3.16 :**

Calculez successivement u et u' par application de la relation des diviseurs de tension. On donne :

$$R_1 = R_3 = R_4 = 10 \text{ k}\Omega ; R_2 = 20 \text{ k}\Omega ; e = 8 \text{ V}.$$

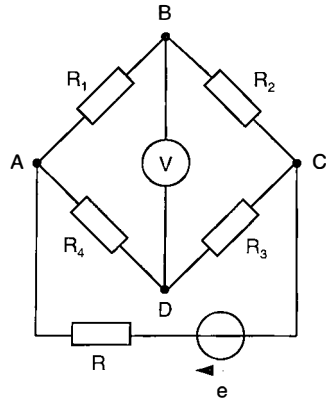
**EXERCICE 3.17 :**

Calculez u pour $i = 2 \text{ mA}$; $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$; $R_2 = 3 \text{ k}\Omega$; $R_3 = 2 \text{ k}\Omega$.

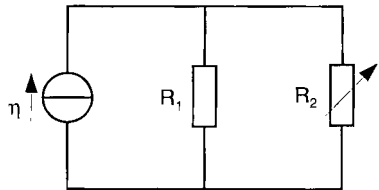


EXERCICE 3.18 :

Etablissez la condition d'équilibre du pont de Wheatstone en utilisant la relation du diviseur de tension.

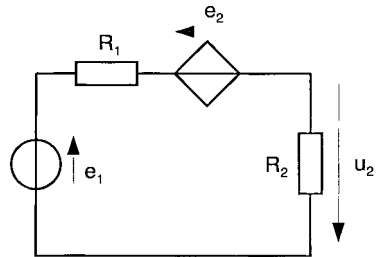
**EXERCICE 3.19 :**

On considère le montage suivant, dans lequel R_2 est une résistance variable comprise entre 0 et l'infini. Calculez la puissance maximum reçue par R_2 , en fonction de η et de R_1 .

**Circuits à une maille et à 2 nœuds****EXERCICE 3.20 :**

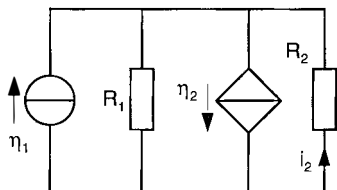
Ce circuit série comporte une source de tension indépendante de f.é.m. e_1 et une source contrôlée de f.é.m. $e_2 = k u_2$. Calculez l'intensité du courant et la puissance reçue par chaque dipôle.

A.N. : $e_1 = 6 \text{ V}$; $k = 1/2$; $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$; $R_2 = 2 \text{ k}\Omega$.

**EXERCICE 3.21 :**

Ce circuit parallèle comporte une source de courant indépendante de débit η_1 et une source contrôlée de débit $\eta_2 = k i_2$. Calculez la puissance reçue par chaque dipôle.

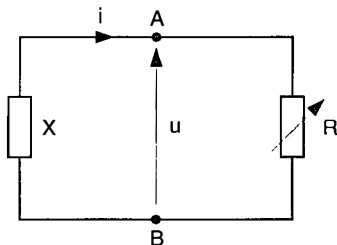
A.N. : $\eta_1 = 2 \text{ mA}$; $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$; $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$; $k = 1/2$.



Générateurs

EXERCICE 3.22 :

Le dipôle X présente une caractéristique linéaire pour $i \geq 0$, $u \geq 0$. La tension u est égale à 2 V lorsque i est égal à 2 A. Elle est égale à 1 V pour $i = 4$ A. Modélisez X par une association série (e , R_G) ou parallèle ($\eta // G_G$).



EXERCICE 3.23 :

a) On associe en série 2 générateurs de tension (e_1 , R_1) et (e_2 , R_2). Déterminez le générateur de tension équivalent (e , R_G).

b) On associe ces 2 générateurs en parallèle. Déterminez le générateur de tension équivalent.

A.N. : $e_1 = 1,5$ V ; $R_1 = 2$ Ω ; $e_2 = 1,5$ V ; $R_2 = 0,5$ Ω .

EXERCICE 3.24 :

On mesure aux bornes d'un dipôle G à caractéristique linéaire une tension à vide $u_0 = u_A - u_B = 12$ V. Lorsqu'on relie ses bornes par un court-circuit, le courant qui circule de A vers B est $i_{cc} = 4$ A.

Ce dipôle étant branché sur une résistance de charge $R = 9$ Ω ,

a) Calculez :

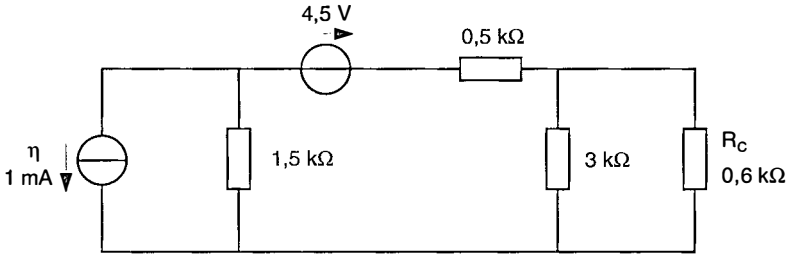
- la tension u aux bornes de R ,
- le courant i dans R ,
- la puissance dissipée dans R .

b) Peut-on calculer la puissance dissipée par effet Joule dans le générateur lui-même ?

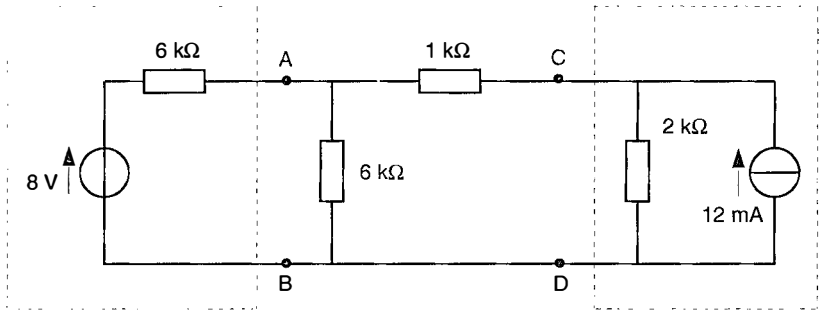
Transformations de générateurs

EXERCICE 3.25 :

Le réseau ci-après comporte 2 générateurs. En utilisant l'équivalence entre générateurs de tension et de courant, calculez la puissance reçue par la résistance R_C .

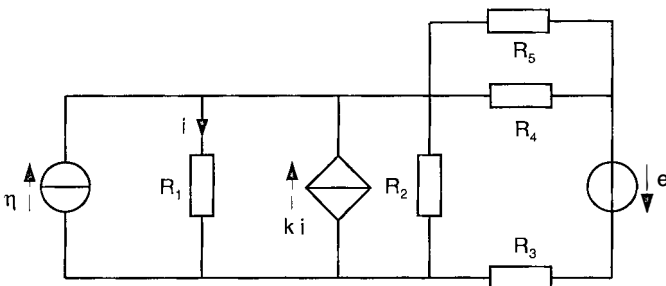
**EXERCICE 3.26 :**

Par transformations successives de ce réseau, déterminez les puissances fournies par les générateurs de tension et de courant.

**EXERCICE 3.27 :**

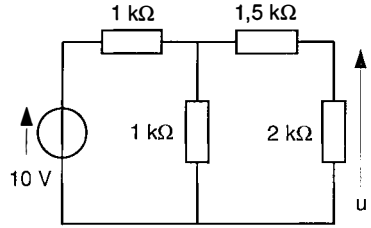
Calculez la tension aux bornes de la source de courant contrôlée, ainsi que la puissance qu'elle fournit. On donne :

$\eta = 9 \text{ mA}$; $e = 48 \text{ V}$; $k = 0,8$; $R_1 = 3 \text{ k}\Omega$; $R_2 = 8 \text{ k}\Omega$; $R_3 = 18 \text{ k}\Omega$;
 $R_4 = R_5 = 12 \text{ k}\Omega$.

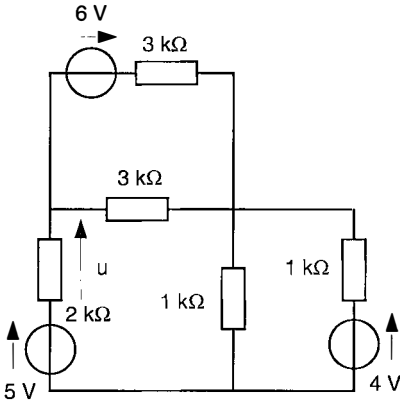


EXERCICE 3.28 :

Montrez que ce réseau est équivalent à une maille unique comportant un générateur de tension en série avec la résistance de $2\text{ k}\Omega$. Calculez la tension u aux bornes de cette résistance.

**EXERCICE 3.29 :**

Mêmes questions pour le réseau ci-dessous.



Analyse des réseaux résistifs

Nous allons étudier dans ce chapitre un certain nombre de méthodes générales et de théorèmes qui permettent de déterminer les inconnues d'un réseau électrique, qu'il s'agisse des intensités des courants dans ses branches, ou des tensions aux bornes de ses éléments résistifs.

Ces méthodes d'analyse reposent essentiellement sur l'utilisation des lois de Kirchhoff. Elles nécessitent la transformation éventuelle du réseau sous une forme permettant d'explicitier aisément ces lois, en fonction de la nature des inconnues :

- lorsque les inconnues sont les courants, on remplace les associations parallèles sources de courant-éléments résistifs, par les associations séries équivalentes sources de tension-éléments résistifs. On explicite alors les lois de Kirchhoff sous la forme :

$$\sum_{\rightarrow n} i = 0 \quad \text{loi des nœuds}$$

$$\sum_{\rightarrow M} R i = \sum_{\rightarrow M} e \quad \text{loi des mailles}$$

- lorsque les inconnues sont les tensions aux bornes des éléments résistifs, on effectue les transformations inverses de manière à ne conserver dans le réseau que les associations parallèles sources de courant-éléments résistifs. On explicite alors les lois de Kirchhoff sous la forme :

$$\sum_{\rightarrow n} G u = \sum_{\rightarrow n} \eta \quad \text{loi des nœuds}$$

$$\sum_{\rightarrow M} u = 0 \quad \text{loi des mailles}$$

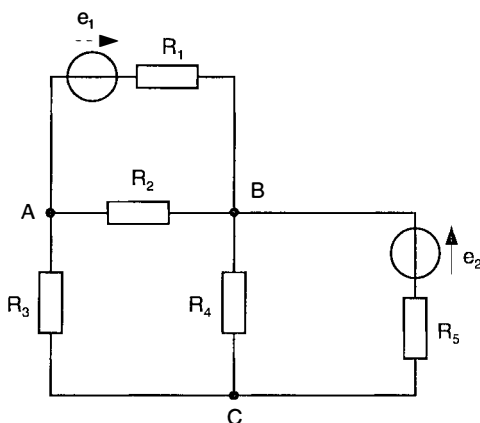
D'une manière générale, nous désignerons par N le nombre total de nœuds du réseau étudié, et par B le nombre total de ses branches.

1 Méthode générale des courants de branches

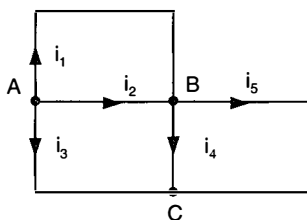
Cette méthode peut être utilisée à chaque fois que les inconnues du réseau sont les B courants de branches. Conformément à ce que nous venons d'indiquer, le réseau étudié sera éventuellement transformé de manière à ne comporter que des sources de tension et des éléments résistifs de résistances connues.

1.1 Équations de nœuds

Considérons le réseau ci-dessous comportant $N = 3$ nœuds et $B = 5$ branches.



Définissons tout d'abord les 5 courants inconnus du problème, en réalisant par exemple le choix représenté ci-dessous :



Explicitons la première loi de Kirchhoff sous la forme $\sum \vec{i} = 0$ en chacun des nœuds du réseau :

$$\text{en A : } -i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

$$\text{en B : } i_1 + i_2 - i_4 - i_5 = 0$$

$$\text{en C : } i_3 + i_4 + i_5 = 0$$

Si on additionne membre à membre ces 3 relations, on obtient l'identité $0 = 0$. Ce résultat est dû au fait que chaque courant inconnu figure nécessairement dans deux équations de nœuds, avec des signes différents. De ce fait, l'une de ces équations, par exemple la seconde, peut se déduire des deux autres en les additionnant membre à membre. Ce résultat peut être étendu à un réseau quelconque :

Dans un réseau comportant N nœuds, la loi des nœuds ne fournit que $N-1$ relations indépendantes.

Dans l'exemple considéré, nous retiendrons par exemple les équations écrites en A et en B :

$$-i_1 - i_2 - i_3 = 0 \quad (1)$$

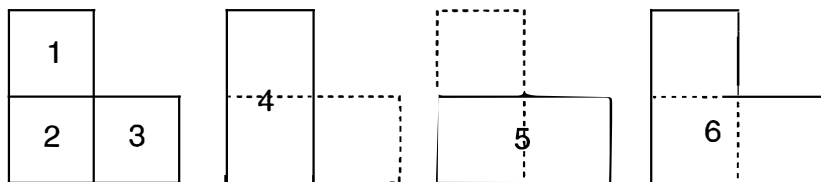
$$i_1 + i_2 - i_4 - i_5 = 0 \quad (2)$$

1.2 Équations de mailles - choix des mailles indépendantes

Pour compléter le système de B équations nécessaire au calcul des courants de branches, il reste à écrire :

$$B - (N - 1) = B - N + 1$$

relations indépendantes, par application de la deuxième loi de Kirchhoff. Dans le réseau que nous étudions, il est possible d'isoler 6 mailles différentes :

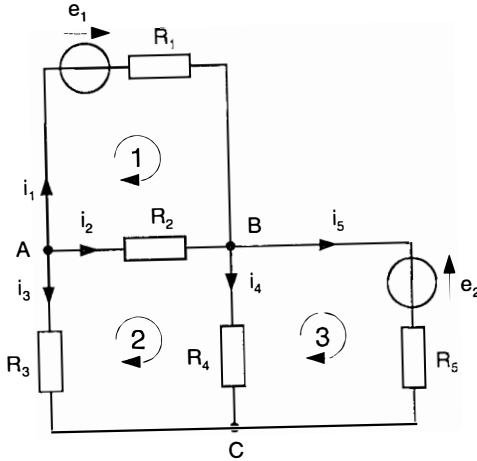


Les six équations correspondantes ne sont pas toutes indépendantes. Par exemple, l'équation relative à la maille 4 peut s'obtenir en additionnant membre à membre les relations écrites pour les mailles 1 et 2. Ces trois mailles sont donc inadaptées à la résolution de ce problème.

Nous admettons que pour construire un système de $B - N + 1$ équations de mailles indépendantes, il suffit de respecter la condition suivante :

Toute branche du réseau doit appartenir à une maille au moins, et à deux mailles au plus.

Reprenons l'exemple étudié, en choisissant les mailles 1, 2, 3, et en les orientant conformément à la figure ci-dessous :



Explicitons la deuxième loi de Kirchhoff dans chacune d'elles sous la forme $\sum_{\rightarrow M} R i = \sum_{\rightarrow M} e$:

$$\text{maille 1 : } R_1 i_1 - R_2 i_2 = e_1 \quad (3)$$

$$\text{maille 2 : } R_2 i_2 + R_4 i_4 - R_3 i_3 = 0 \quad (4)$$

$$\text{maille 3 : } -R_4 i_4 + R_5 i_5 = -e_2 \quad (5)$$

1.3 Résolution du système d'équations

La résolution du système formé par les $N - 1 = 2$ équations de nœuds et les $B - N + 1 = 3$ équations de mailles peut se faire par la méthode de Cramer qui nécessite le calcul de déterminants à $B = 5$ lignes et colonnes. Par exemple, le courant i_1 est calculé en effectuant le quotient :

$$i_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ e_1 & -R_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 & R_4 & 0 \\ -e_2 & 0 & 0 & -R_4 & R_5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ R_1 & -R_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 & R_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_4 & R_5 \end{vmatrix}}$$

2 Méthode simplifiée des courants de branches

2.1 Principe

Examinons le système de B équations construit aux § 1. 1 et 1. 2. Les $N - 1$ équations de nœuds sont des relations entre courants, beaucoup plus simples que les $B - N + 1$ équations de mailles dans lesquelles les courants sont coefficientés par des résistances. Plutôt que de résoudre directement ce système, on peut songer à utiliser les équations de nœuds pour éliminer $N - 1$ inconnues dans le système formé par les équations de mailles. Cette méthode de substitution permet de se ramener à un système de $B - N + 1$ équations à autant d'inconnues, beaucoup plus facile à résoudre que le système initial.

2.2 Exemple

Reproduisons le système d'équations obtenu dans l'exemple précédent :

$$-i_1 - i_2 - i_3 = 0 \quad (1)$$

$$i_1 + i_2 - i_4 - i_5 = 0 \quad (2)$$

$$R_1 i_1 - R_2 i_2 = e_1 \quad (3)$$

$$R_2 i_2 + R_4 i_4 - R_3 i_3 = 0 \quad (4)$$

$$-R_4 i_4 + R_5 i_5 = -e_2 \quad (5)$$

On peut éliminer i_2 à partir de (1) :

$$i_2 = -i_1 - i_3$$

et i_4 à partir de (2) :

$$i_4 = i_1 + i_2 - i_5 = -i_3 - i_5$$

en reportant ces valeurs dans les équations (3) à (5), on obtient :

$$R_1 i_1 - R_2 (-i_1 - i_3) = (R_1 + R_2) i_1 + R_2 i_3 = e_1$$

$$R_2 (-i_1 - i_3) + R_4 (-i_3 - i_5) - R_3 i_3 \\ = -R_2 i_1 - (R_2 + R_3 + R_4) i_3 - R_4 i_5 = 0$$

$$-R_4 (-i_3 - i_5) + R_5 i_5 = R_4 i_3 + (R_4 + R_5) i_5 = -e_2$$

La détermination des inconnues i_1 , i_3 , i_5 ne nécessite ici que le calcul de déterminants à trois lignes et trois colonnes. Le courant i_1 est calculé par exemple en effectuant le quotient :

$$i_1 = \frac{\begin{vmatrix} e_1 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 + R_3 + R_4 & R_4 \\ -e_2 & R_4 & R_4 + R_5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + R_2 & R_2 & 0 \\ R_2 & R_2 + R_3 + R_4 & R_4 \\ 0 & R_4 & R_4 + R_5 \end{vmatrix}}$$

Les deux autres courants inconnus i_2 et i_4 sont ensuite calculés à partir des courants précédents, au moyen des relations (1) et (2).

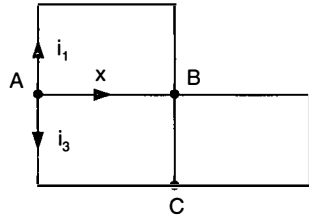
2.3 Mise en œuvre de la méthode

Lorsqu'on utilise la méthode des branches pour étudier un réseau, on se limite dès le départ à un nombre d'inconnues égal à $B - N + 1$: on évite en effet d'introduire $N - 1$ courants supplémentaires inutiles en exprimant tout de suite, au moyen des équations de nœuds, en fonction des inconnues choisies.

Reprenons l'exemple précédent :

- le nombre de branches aboutissant au nœud A est égal à 3. On définit simplement deux courants, par exemple i_1 et i_3 , et on exprime en fonction de ceux-ci le courant x qui circule de A vers B :

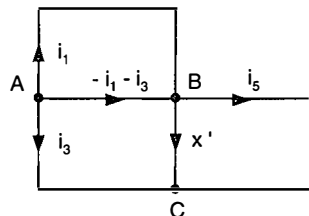
$$-i_1 - i_3 - x = 0 \Rightarrow x = -i_1 - i_3$$



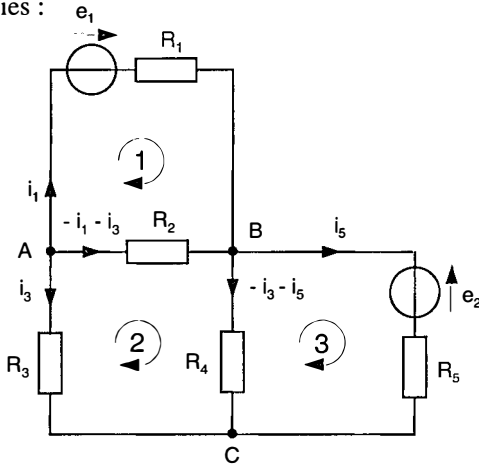
- le nombre de branches aboutissant au nœud B est égal à 4. Les courants circulant dans deux d'entre elles ont déjà été définis : il suffit donc d'en introduire un troisième, par exemple i_5 pour en déduire le quatrième, x' , par application de la loi des nœuds :

$$-i_1 - i_3 + i_1 - i_5 - x' = 0$$

$$\Rightarrow x' = -i_3 - i_5$$



- la mise en équation du réseau s'effectue directement avec les trois inconnues ainsi définies :



$$\text{maille 1 : } R_1 i_1 + R_2 (i_1 + i_3) = (R_1 + R_2) i_1 + R_2 i_3 = e_1$$

$$\begin{aligned} \text{maille 2 : } & -R_2 (i_1 + i_3) - R_4 (i_3 + i_5) - R_3 i_3 \\ & = -R_2 i_1 - (R_2 + R_3 + R_4) i_3 - R_4 i_5 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{maille 3 : } R_4 (i_3 + i_5) + R_5 i_5 = R_4 i_3 + (R_4 + R_5) i_5 = -e_2$$

On retrouve les 3 équations du § 2.2.

3 Méthode des mailles

La méthode des mailles est une simplification astucieuse de la méthode générale des courants de branches qui permet de construire directement, à partir de la deuxième loi de Kirchhoff, un système de $B - N + 1$ équations indépendantes. Ces équations font intervenir des courants fictifs, sans réalité physique, appelés courants de mailles, rendant la première loi de Kirchhoff inopérante.

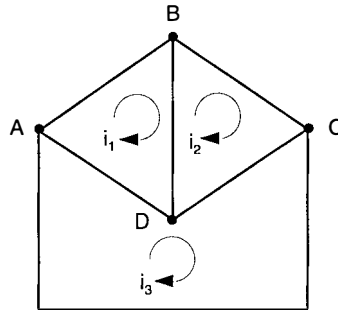
3.1 Définition des courants de mailles

Dans un réseau comportant N nœuds et B branches, sélectionnons un ensemble de $m = B - N + 1$ mailles indépendantes. Commençons par numéroter ces mailles de 1 à m , et par définir sur chacune d'elles un sens de parcours. Par définition :

Le courant de maille i_j dans la maille n° j , est le courant fictif qui circule le long de cette maille dans son sens de parcours.

Par exemple, dans le réseau ci-dessous, on peut choisir les $m = 3$ mailles indépendantes suivantes associées aux courants i_1, i_2, i_3 :

maille 1 : ABDA
 maille 2 : BCDB
 maille 3 : ADCA



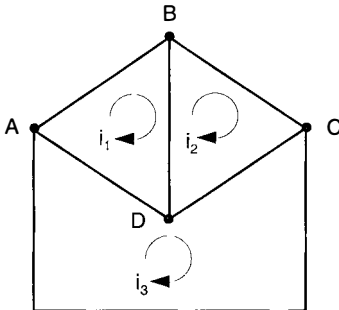
3.2 Relation entre courants de branches et courants de mailles

Ainsi que nous l'avons indiqué au paragraphe 1. 2, les mailles indépendantes sont choisies de manière à ce que toute branche du réseau appartienne à l'une d'elles au moins, et à deux d'entre elles au plus.

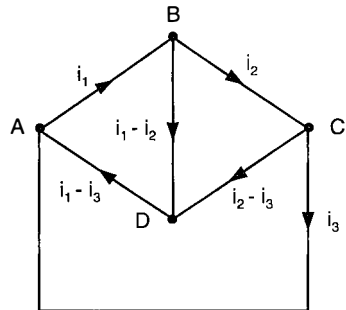
De ce fait, on peut rencontrer deux situations :

- dans une branche qui n'appartient qu'à une seule maille, le courant réel s'identifie au courant de maille. Par exemple, dans le réseau précédent, le courant i_{AB} qui circule de A vers B est égal à i_1 ; i_{BC} est égal à i_2 , et i_{AC} à $-i_3$.
- dans une branche commune à 2 mailles, le courant réel est égal à la somme algébrique des courants de mailles correspondants. Par exemple, dans la branche BD commune aux mailles 1 et 2, le courant qui circule de B vers D est égal à $i_1 - i_2$.

On peut donc passer très facilement du réseau (a) ci-dessous où sont représentés les courants de mailles, au réseau (b) où figurent les courants de branches réels.



(a)



(b)

3.3 Forme des équations de nœuds

Écrivons la première loi de Kirchoff au nœud A du réseau précédent en nous aidant de la figure (b) ci-dessus :

$$i_3 + (i_1 - i_3) - i_1 = 0$$

soit : $0 = 0$

On constate que cette loi ne permet d'établir aucune relation entre les courants de mailles : cela résulte du fait qu'à chaque courant dirigé vers le nœud est associé un courant égal dirigé en sens inverse. On trouve évidemment un résultat analogue en chacun des autres nœuds :

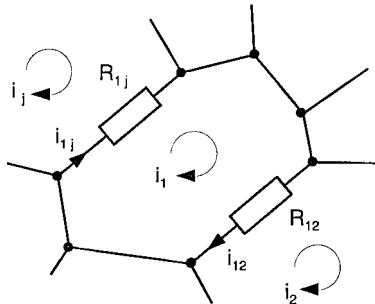
La loi des nœuds ne fournit aucune relation entre courants de mailles.

3.4 Forme des équations de mailles pour un réseau ne comportant que des sources indépendantes

Examinons tout d'abord le cas d'un réseau qui, après transformation éventuelle de ses générateurs de courant, ne comporte plus que des générateurs de tension indépendants.

3.4.1. ANALYSE DU PROBLÈME

Commençons par sélectionner dans ce réseau un ensemble de $m = B - N + 1$ mailles indépendantes et par les numéroter de 1 à m . Définissons ensuite m courants de mailles i_1, \dots, i_m de telle sorte qu'ils circulent en sens inverses dans toute branche commune à deux mailles.



Désignons par $R_{1j} = R_{j1}$ la résistance de couplage commune aux mailles 1 et j , et par R_{11} la somme des résistances dans la maille 1. Désignons par R_{10} la résistance n'appartenant qu'à la maille 1. R_{11} peut s'écrire sous la forme :

$$R_{11} = R_{10} + R_{12} + R_{13} + \dots + R_{1m} = \sum_{j=2}^m R_{1j} + R_{10}$$

Désignons par i_{1j} le courant qui circule dans la résistance R_{1j} dans le sens du courant i_1 . On peut l'expliciter sous la forme :

$$i_{1j} = i_1 - i_j$$

puisque i_1 et i_j sont, par hypothèse, de sens opposés.

Ecrivons maintenant la deuxième loi de Kirchhoff pour la maille 1 :

$$\begin{aligned} R_{10} i_1 + \sum_{j=2}^m R_{1j} i_{1j} &= \left(R_{10} + \sum_{j=2}^m R_{1j} \right) i_1 - \sum_{j=2}^m R_{1j} i_j = \sum_{\rightarrow M1} e \\ &= R_{11} i_1 - \sum_{j=2}^m R_{1j} i_j \end{aligned}$$

soit :

$$R_{11} i_1 - R_{12} i_2 - \dots - R_{1m} i_m = \sum_{\rightarrow M1} e$$

On constate que le coefficient du courant de maille i_1 est affecté du signe +, alors que les autres coefficients sont affectés du signe -. Ce résultat est dû au fait que les courants i_2, i_3, \dots, i_m circulent par hypothèse en sens inverses de i_1 dans les résistances $R_{12}, R_{13}, \dots, R_{1m}$.

On obtient des relations analogues pour les autres mailles du réseau : seul le coefficient du courant de maille est affecté du signe +.

3.4.2. CONSTRUCTION PRATIQUE DES ÉQUATIONS

Pour appliquer la méthode des mailles, on procède en plusieurs étapes :

- On définit $m = B - N + 1$ mailles indépendantes de manière à ce que toute branche du réseau appartienne à une maille au moins, et à deux mailles au plus.
- On choisit le sens des courants de mailles de manière à ce qu'ils circulent en sens inverses dans toutes les branches communes à deux mailles.
- On écrit directement les m équations de mailles sous la forme :

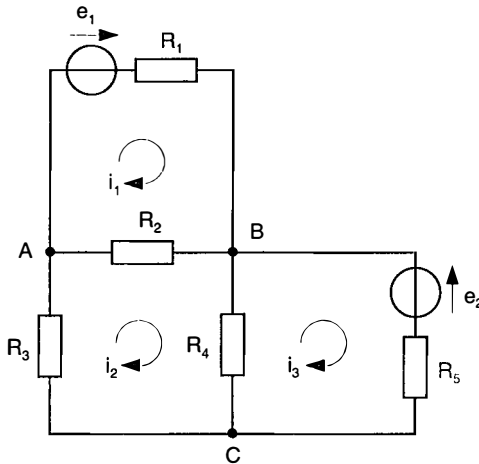
$$\begin{aligned} R_{11} i_1 - R_{12} i_2 \dots - R_{1m} i_m &= \sum_{\rightarrow M1} e \\ -R_{21} i_1 + R_{22} i_2 \dots - R_{2m} i_m &= \sum_{\rightarrow M2} e \\ -R_{m1} i_1 - R_{m2} i_2 \dots + R_{mm} i_m &= \sum_{\rightarrow Mm} e \end{aligned}$$

Dans ces équations :

- le coefficient du courant de maille, affecté du signe +, représente la somme des résistances de la maille.
- les autres coefficients, affectés du signe –, représentent les résistances communes avec les mailles adjacentes.

3.4.3. EXEMPLE

Considérons le réseau déjà étudié avec trois courants de mailles i_1 , i_2 , i_3 tournant dans le sens des aiguilles d'une montre.



Les équations de mailles se déduisent immédiatement des règles précédentes :

$$\text{maille 1 : } (R_1 + R_2) i_1 - R_2 i_2 = e_1$$

$$\text{maille 2 : } -R_2 i_1 + (R_2 + R_3 + R_4) i_2 - R_4 i_3 = 0$$

$$\text{maille 3 : } -R_4 i_2 + (R_4 + R_5) i_3 = -e_2$$

3.5 Forme des équations de mailles dans le cas général

3.5.1. PRINCIPE

Lorsque le réseau étudié comporte des sources contrôlées, on peut réaliser sa mise en équation par la même méthode que précédemment. Les f.é.m. des sources contrôlées qui apparaissent aux seconds membres dans les équations ainsi formées, sont ensuite explicitées, suivant le cas, en fonction des

courants de mailles ou des f.é.m. des sources indépendantes. On aboutit alors à un système de m équations linéaires de la forme :

$$\begin{aligned} r_{11} i_1 + r_{12} i_2 \dots + r_{1m} i_m &= \varepsilon_1 \\ r_{21} i_1 + r_{22} i_2 \dots + r_{2m} i_m &= \varepsilon_2 \\ &\vdots \\ r_{m1} i_1 + r_{m2} i_2 \dots + r_{mm} i_m &= \varepsilon_m \end{aligned}$$

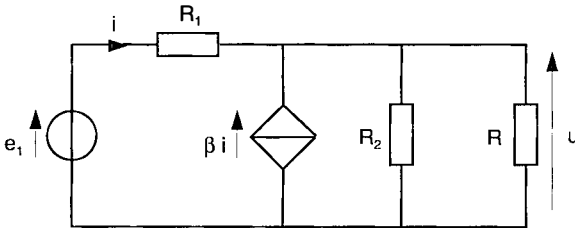
Les seconds membres $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ sont des combinaisons linéaires des f.é.m. des sources indépendantes :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \alpha_{11} e_1 + \dots + \alpha_{1p} e_p \\ \varepsilon_m &= \alpha_{m1} e_1 + \dots + \alpha_{mp} e_p \end{aligned}$$

La résolution de ce système conduit à la détermination des courants inconnus.

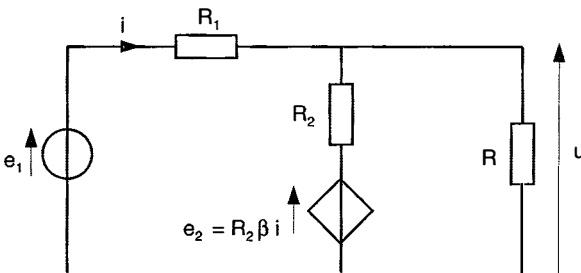
3.5.2. EXEMPLE

Considérons le réseau ci-dessous comportant une source de tension indépendante et une source de courant contrôlée :

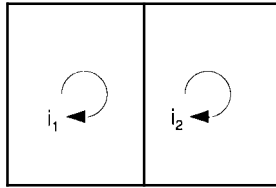


On se propose de calculer la tension u aux bornes de la charge R .

a) on commence par transformer ce réseau en remplaçant l'association parallèle ($\beta i // R_2$) par l'association série équivalente ($e_2 = R_2 \beta i, R_2$).



b) dans le réseau ainsi obtenu, le nombre de mailles indépendantes est $m = 2$. Ces mailles peuvent être définies et orientées, par exemple, comme suit :



On construit directement le système d'équations de mailles :

$$\text{maille 1 : } (R_1 + R_2) i_1 - R_2 i_2 = e_1 - R_2 \beta i$$

$$\text{maille 2 : } -R_2 i_1 + (R_2 + R) i_2 = R_2 \beta i$$

Dans cet exemple, le courant i s'identifie à i_1 . On obtient donc le système suivant :

$$\begin{aligned} (R_1 + R_2 + R_2 \beta) i_1 - R_2 i_2 &= e_1 \\ - (R_2 \beta + R_2) i_1 + (R_2 + R) i_2 &= 0 \end{aligned}$$

Sa résolution fournit la valeur de i_2 à partir de laquelle on calcule u .

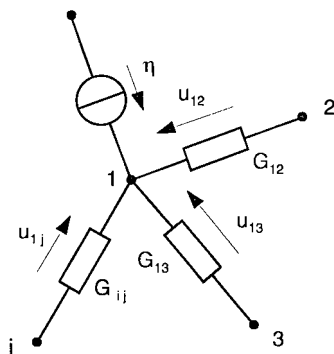
4 Méthode des nœuds

La méthode des nœuds est une méthode d'analyse utilisable lorsque les inconnues du réseau sont les tensions aux bornes des éléments résistifs. Elle permet de construire directement un système de $n = N - 1$ équations indépendantes, et de réaliser par conséquent un gain de $B - N + 1$ équations par rapport à la méthode des branches. Sa mise en œuvre nécessite le remplacement éventuel des générateurs de tension du réseau par des générateurs de courant équivalents.

4.1 Principe

Dans un réseau comportant N nœuds, désignons par $G_{1j} = G_{j1}$ la conductance comprise entre les nœuds 1 et j , et par G_{11} la somme des conductances aboutissant au nœud 1. G_{11} a pour expression générale :

$$G_{11} = G_{12} + G_{13} + \dots + G_{1N} = \sum_{j=2}^N G_{1j}$$



Désignons par $u_{1j} = u_1 - u_j$ la tension aux bornes de la conductance G_{1j} . Avec ces notations, on peut expliciter la première loi de Kirchhoff au nœud 1 sous la forme :

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^N G_{1j} u_{1j} &= \left(\sum_{j=2}^N G_{1j} \right) u_1 - \sum_{j=2}^N G_{1j} u_j = \sum_{\rightarrow \cdot 1} \eta \\ &= G_{11} u_1 - \sum_{j=2}^N G_{1j} u_j \end{aligned}$$

soit :

$$G_{11} u_1 - G_{12} u_2 - \dots - G_{1N} u_N = \sum_{\rightarrow \cdot 1} \eta$$

On constate que, dans cette relation, le coefficient G_{11} est affecté du signe +, alors que les coefficients G_{12} , ..., G_{1N} sont affectés du signe - .

Il est facile de généraliser ce résultat pour établir le système d'équations de nœuds :

$$\begin{aligned} G_{11} u_1 - G_{12} u_2 - \dots - G_{1N} u_N &= \sum_{\rightarrow \cdot 1} \eta \\ -G_{21} u_1 + G_{22} u_2 - \dots - G_{2N} u_N &= \sum_{\rightarrow \cdot 2} \eta \\ \vdots & \\ -G_{N1} u_1 - G_{N2} u_2 - \dots + G_{NN} u_N &= \sum_{\rightarrow \cdot N} \eta \end{aligned}$$

Ce système ne comporte en fait que $N - 1$ équations indépendantes. Les potentiels u_1, \dots, u_N étant définis à une constante additive près, on peut

poser $u_N = 0$: dans ces conditions, les potentiels u_1, \dots, u_{N-1} s'identifient aux tensions entre les nœuds 1, ..., $N - 1$, et le nœud N . La N ième équation, qui se déduit des $N - 1$ équations précédentes en les additionnant membre à membre, doit être enlevée du système.

4.2 Mise en œuvre de la méthode

Pour appliquer la méthode des nœuds, on procède en plusieurs étapes :

- On choisit arbitrairement un nœud de référence auquel on attribue le potentiel 0. On matérialise ce choix par le symbole de masse.
- On numérote les autres nœuds de 1 à $n = N - 1$.
- On désigne par u_1, \dots, u_n les d.d.p. entre ces nœuds et le nœud de référence.
- On écrit directement le système de n équations de nœuds sous la forme :

$$\begin{array}{l} G_{11} u_1 - G_{12} u_2 - \dots - G_{1n} u_n = \sum_{\rightarrow *1} \eta \\ - G_{21} u_1 + G_{22} u_2 - \dots - G_{2n} u_n = \sum_{\rightarrow *2} \eta \\ : \\ - G_{n1} u_1 - G_{n2} u_2 - \dots + G_{nn} u_n = \sum_{\rightarrow *n} \eta \end{array}$$

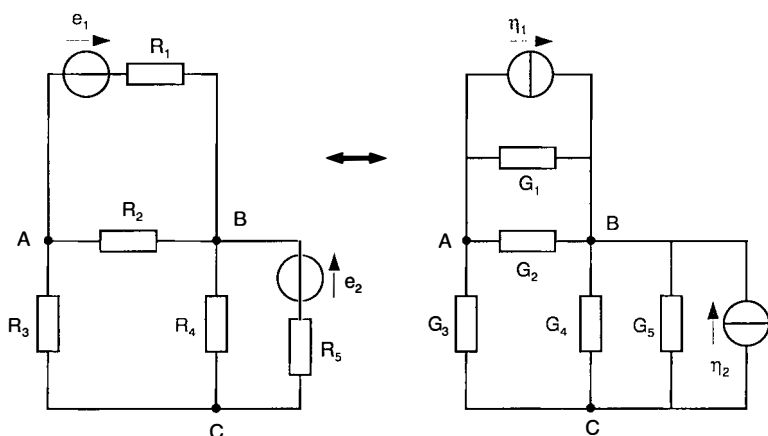
Dans chacune de ces relations :

- le coefficient de la tension de nœud, affecté du signe +, représente la somme des conductances reliées à ce nœud.
- les autres coefficients, affectés du signe -, représentent les conductances comprises entre ce nœud et les autres nœuds du réseau.

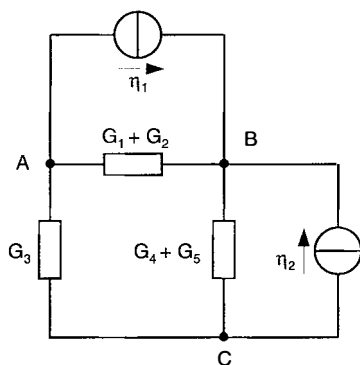
4.3 Exemple

Pour résoudre, par la méthode des nœuds, le réseau déjà étudié :

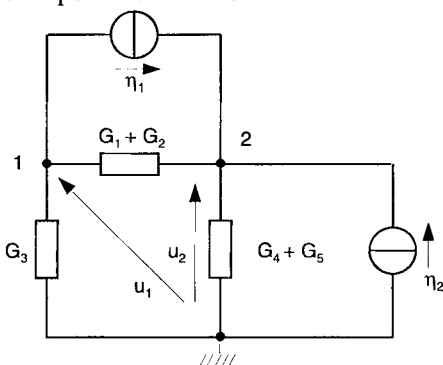
- Commençons par le transformer en remplaçant les générateurs de tension par des générateurs de courant :



b) Simplifions le réseau ainsi obtenu en remplaçant les conductances en parallèle par des conductances équivalentes.



c) Choisissons le nœud C comme nœud de référence, et attribuons respectivement aux nœuds A et B les numéros 1 et 2. Matérialisons par des flèches les tensions u_1 et u_2 correspondant à ce choix.



d) Explicitons directement le système d'équations de nœuds :

$$\text{nœud 1 : } (G_1 + G_2 + G_3) u_1 - (G_1 + G_2) u_2 = -\eta_1$$

$$\text{nœud 2 : } -(G_1 + G_2) u_1 + (G_1 + G_2 + G_4 + G_5) u_2 = \eta_1 + \eta_2$$

La résolution de ce système fournit immédiatement les tensions inconnues.

5 Théorème de superposition

5.1 Démonstration

Lorsqu'on applique la méthode simplifiée des courants de branches à un réseau résistif comportant à la fois des sources indépendantes et des sources contrôlées, on commence par remplacer les générateurs de courant par des générateurs de tension équivalents.

Dans le système de $m = B - N + 1$ équations de mailles obtenues par application de la deuxième loi de Kirchhoff, on explicite ensuite les f.é.m. des sources de tension contrôlées en fonction des m courants inconnus, ou des f.é.m. des sources indépendantes. On aboutit alors à un système d'équations du type :

$$r_{11} i_1 + r_{12} i_2 + \dots + r_{1m} i_m = \sum_{\rightarrow M1} e$$

$$r_{m1} i_1 + r_{m2} i_2 + \dots + r_{mm} i_m = \sum_{\rightarrow Mm} e$$

Dans ce système, les seconds membres sont formés exclusivement à partir :

- des f.é.m. e_1, \dots, e_p des sources de tension indépendantes du réseau initial,
- des f.é.m. e'_1, \dots, e'_q des sources de tension indépendantes provenant de la transformation des générateurs de courant indépendants du réseau initial.

Calculons l'un des courants inconnus, par exemple i_1 :

$$i_1 = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{\rightarrow M1} e & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ \sum_{\rightarrow Mm} e & r_{m2} & \dots & r_{mm} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} r_{11} & \dots & r_{1m} \\ r_{m1} & \dots & r_{mm} \end{vmatrix}}$$

Développons le numérateur suivant la première colonne, et regroupons les termes obtenus en facteurs des f.é.m. e_1, \dots, e_p , puis e'_1, \dots, e'_q . Exprimons ensuite les f.é.m. e'_1, \dots, e'_q en fonction des débits η_1, \dots, η_q des sources de courants indépendantes :

$$i_1 = A_{11} e_1 + \dots + A_{1p} e_p + A'_{11} \eta_1 + \dots + A'_{1q} \eta_q$$

Le courant de branche i_1 apparaît comme une combinaison linéaire des f.é.m. des sources de tension indépendantes et des débits des sources de courant indépendantes.

Cette relation peut être généralisée à toutes les inconnues ; elle traduit le théorème de superposition :

L'intensité du courant dans une branche quelconque d'un réseau comportant des sources indépendantes et des sources contrôlées est la somme des courants dus à chacune des sources indépendantes, agissant séparément.

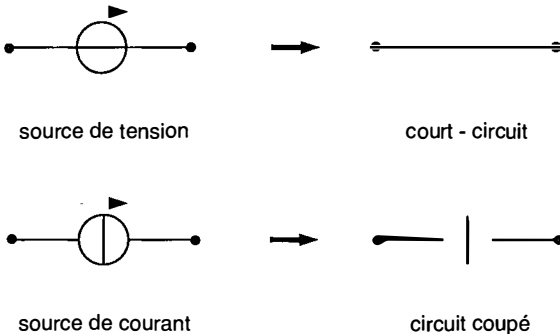
De la même manière :

La tension aux bornes d'un élément résistif dans un réseau comportant des sources indépendantes et des sources contrôlées est la somme des tensions dues à chacune des sources indépendantes, agissant séparément.

5.2 Utilisation pratique

Pour déterminer la "réponse" correspondant à une source indépendante donnée (intensité dans une branche, ou tension entre deux nœuds), on neutralise toutes les autres sources indépendantes, en court-circuitant les sources de tension et en déconnectant les sources de courant.

En pratique, la neutralisation d'une source indépendante s'effectue en supprimant le cercle qui la matérialise.

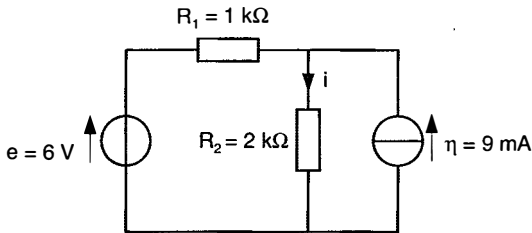


Les sources contrôlées du réseau ne doivent jamais être neutralisées. On peut retenir ce résultat en énonçant que :

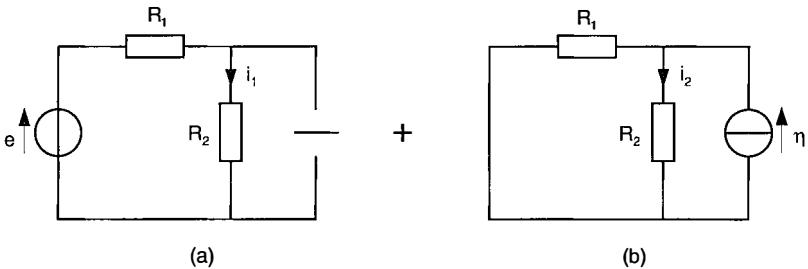
Les losanges matérialisant les sources contrôlées ne peuvent jamais être enlevés.

5.3 Exemple

Déterminons le courant i dans le réseau ci-dessous :



Ce courant peut être considéré comme la somme $i_1 + i_2$ des courants dus à la source de tension et à la source de courant :



- L'analyse du circuit (a) conduit à la détermination de i_1 :

$$i_1 = \frac{e}{R_1 + R_2} = \frac{6}{3 \cdot 10^3} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 2 \text{ mA}$$

- L'analyse du diviseur de courant (b) conduit à celle de i_2 :

$$i_2 = \eta \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 9 \cdot \frac{1}{3} = 3 \text{ mA}$$

- Le courant i vaut donc :

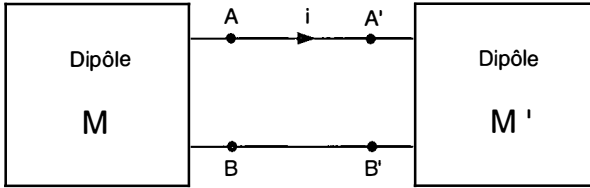
$$i = i_1 + i_2 = 5 \text{ mA}$$

6 Théorèmes de Thévenin et de Norton

Les théorèmes de Thévenin et de Norton peuvent être utilisés pour déterminer l'intensité du courant circulant dans une branche particulière d'un réseau. Leur intérêt principal tient au fait que la détermination de cette intensité ne nécessite pas la mise en équation complète du réseau.

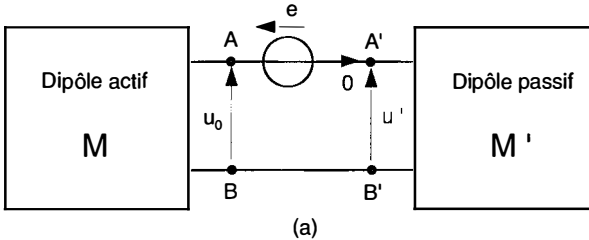
6.1 Démonstration du théorème de Thévenin

Disposons le réseau à étudier sous la forme d'une association de 2 dipôles M et M' entre deux bornes A, A' et B, B' . On se propose de déterminer l'intensité i du courant qui traverse le dipôle M' à l'instant t .

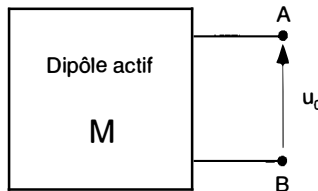


a) Considérons tout d'abord le cas où le dipôle M' est purement passif : le courant qui le traverse est dû uniquement aux sources indépendantes de M .

Intercalons une source de tension entre A et A' , et ajustons sa f.é.m. de telle sorte que le courant transmis à M' s'annule à tout instant.

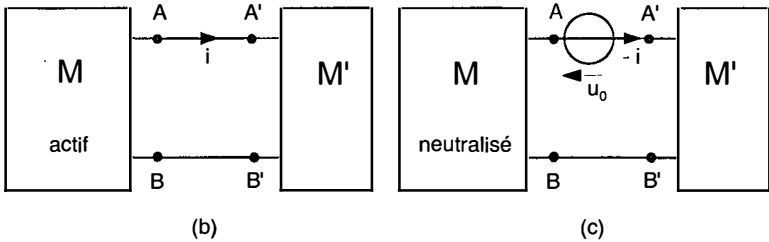


Dans ces conditions, la d.d.p. u' aux bornes de M' est nulle, et la d.d.p. u_0 aux bornes de M est égale à la f.é.m. e de la source intercalée. Rien ne s'oppose à ce que l'on déconnecte alors le dipôle M' : $e = u_0$ représente la tension mesurée à vide entre les bornes du dipôle M .

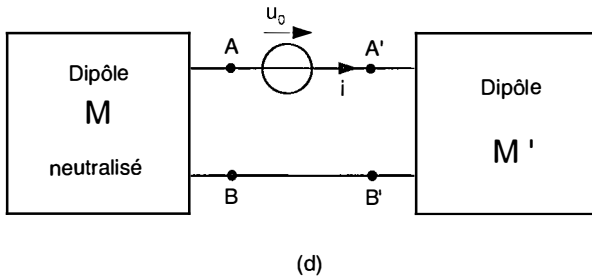


D'après le théorème de superposition, on peut considérer que le courant nul dans le réseau (a) est la somme de deux courants opposés :

- un courant i résultant des effets des sources indépendantes du dipôle M lorsque la source de f.é.m. u_0 est neutralisée, autrement dit lorsqu'elle est absente du réseau (figure b).
- un courant $-i$ dû à cette source, lorsque les sources indépendantes du dipôle M sont neutralisées (figure c).

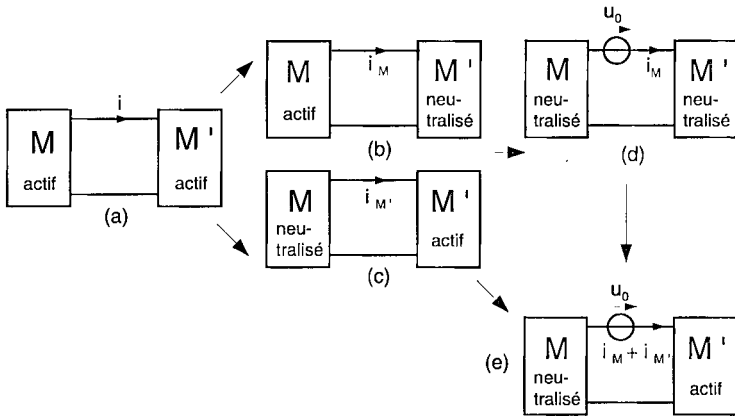


Invertissons la polarité de la source supplémentaire, sans en modifier les caractéristiques : le dipôle M' reçoit à nouveau le courant i .



Du point de vue de ce dipôle, les situations représentées par (b) et (d) sont strictement équivalentes : M' reçoit du dipôle actif M le même courant que celui qu'il recevrait de l'association série d'une source de tension de f.é.m. u_0 avec le dipôle M neutralisé. Cette association est appelée équivalent de Thévenin du dipôle actif M.

b) Dans l'hypothèse où le dipôle M' est lui-même actif, le courant i peut être décomposé en un courant i_M dû au dipôle M travaillant seul, et un courant $i_{M'}$ fourni par M' lui-même.



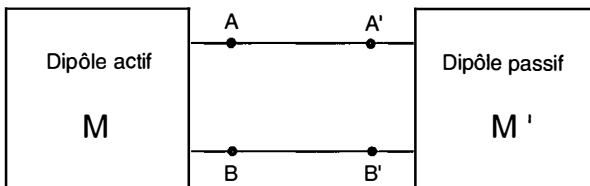
Nous venons de montrer que la réponse partielle i_M reste inchangée si, M étant neutralisé, on intercale la source de f.é.m. u_0 (figures b et d). En appliquant une nouvelle fois le théorème de superposition, il apparaît que les actions conjuguées de cette source et des sources contenues dans M' produisent le courant total $i = i_M + i_{M'}$.

En définitive, que le dipôle M' soit actif ou passif, le réseau actif M peut toujours être remplacé par son équivalent de Thévenin. Sous sa forme la plus générale, le théorème de Thévenin peut donc s'énoncer de la façon suivante :

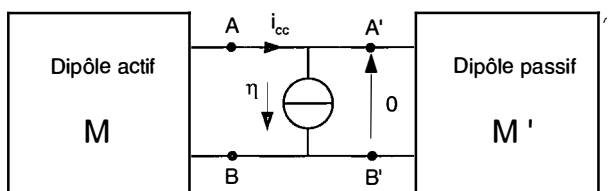
- Soit un circuit linéaire disposé sous la forme de deux dipôles M et M' reliés par deux connexions.
 - Soit u_0 la d.d.p. à vide qui apparaîtrait aux bornes de M si M' était déconnecté, de telle sorte que M ne fournisse aucun courant.
- Tous les courants et tensions dans M' resteront inchangés si, M étant neutralisé, on lui adjoint en série une source de tension de f.é.m. égale à u_0 .

6.2 Démonstration du théorème de Norton

Considérons à nouveau l'association des dipôles M et M', dans l'hypothèse où M est actif et M' passif.



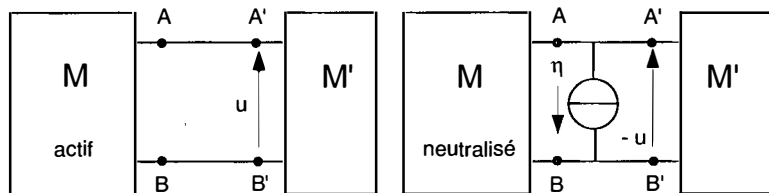
Intercalons une source de courant entre A et B, et ajustons son débit η de manière à annuler la tension aux bornes de M' : le courant dans ce dipôle est alors égal à 0, et tout se passe comme si M était court-circuité.



(a)

Le débit η de cette source de courant est donc le courant de court-circuit i_{cc} du dipôle M . D'après le théorème de superposition, on peut considérer que la tension entre les bornes A' et B' du réseau (a) ci-dessus est la somme de deux tensions opposées :

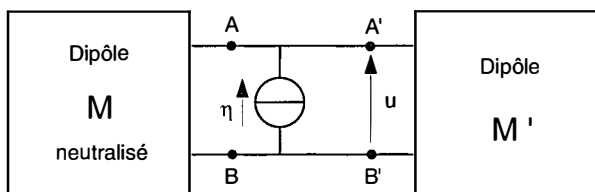
- une tension u résultant des sources indépendantes du dipôle M , lorsque la source de courant de débit η est neutralisée, autrement dit lorsqu'elle est absente du réseau (fig. b).
- une tension $-u$ due à cette source, lorsque les sources indépendantes du dipôle M sont neutralisées (fig. c).



(b)

(c)

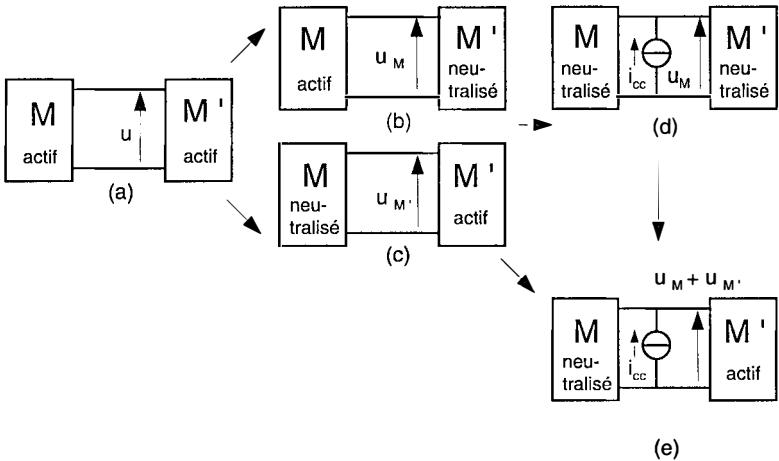
Invertissons le sens de la source de courant, sans en modifier les caractéristiques : la tension aux bornes du dipôle M' est à nouveau égale à u .



(d)

Du point de vue de ce dipôle, les situations représentées par (b) et (d) sont strictement équivalentes : une source de courant de débit i_{cc} en parallèle avec le dipôle M neutralisé produit la même tension aux bornes de M' (et donc le même courant) que le dipôle actif M. Cette association est appelée équivalent de Norton.

b) Montrons que cette équivalence reste valable lorsque le dipôle M est lui-même actif : la tension u aux bornes de ce dipôle est due aux actions superposées des sources de M et de M' (figures a, b, c). La réponse partielle u_M est inchangée si, M étant neutralisé, on intercale la source de Norton de débit i_{cc} (figure d). En appliquant le principe de superposition aux situations (c) et (d), on obtient le résultat (e) : la source de Norton et les sources présentes dans M' produisent une d.d.p. $u = u_M + u_{M'}$.



Sous sa forme la plus générale, le théorème de Norton peut donc s'énoncer de la façon suivante :

- Soit un circuit linéaire disposé sous la forme de deux dipôles M et M' reliés par deux connexions.
- Soit i_{cc} le courant de court-circuit qui traverserait les bornes de M si celles-ci étaient reliées par un conducteur sans résistance, de telle sorte que M ne fournisse aucune tension.

Tous les courants et tensions dans M' resteront inchangés si, M étant neutralisé, on lui adjoint en parallèle une source de courant débitant un courant i_{cc} .

6.3 Énoncés pour des réseaux résistifs

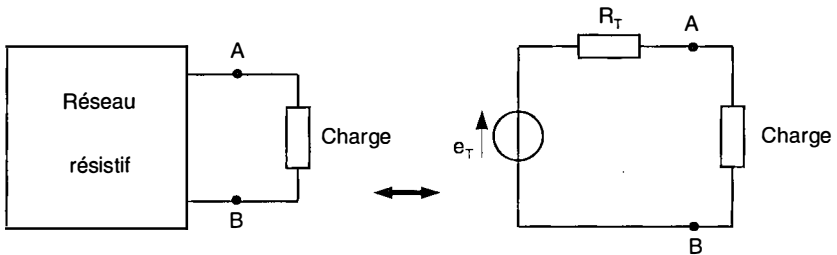
Lorsque le dipôle actif M ne comporte que des éléments résistifs et des sources, il est assimilable à un résistor unique, dès lors que ses sources indépendantes ont été neutralisées. Ce résistor constitue suivant le cas :

- la résistance interne du générateur de Thévenin.
- la conductance interne du générateur de Norton.

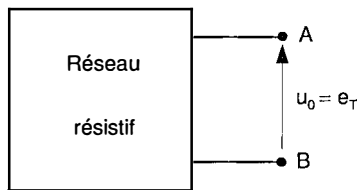
Les théorèmes précédents peuvent alors s'énoncer comme suit :

a) Théorème de Thévenin

Tout réseau résistif relié à une charge entre deux bornes A et B est équivalent, vu de cette charge, à un générateur de Thévenin constitué d'une source de tension de f.é.m. e_T en série avec une résistance R_T .



- e_T est la tension à vide u_0 entre A et B.



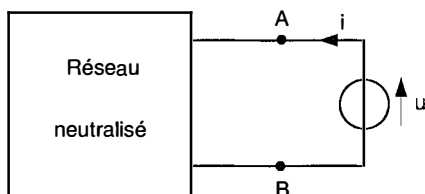
- R_T est la résistance équivalente au réseau entre A et B lorsque ses sources indépendantes sont neutralisées, les sources contrôlées étant maintenues.

La détermination de la résistance R_T du générateur de Thévenin peut soulever quelques difficultés lorsque le réseau comporte des sources contrôlées. Dans ce cas, on procède de la manière suivante, après neutralisation des sources indépendantes :

- on applique une tension extérieure $u = u_A - u_B$ aux bornes du réseau

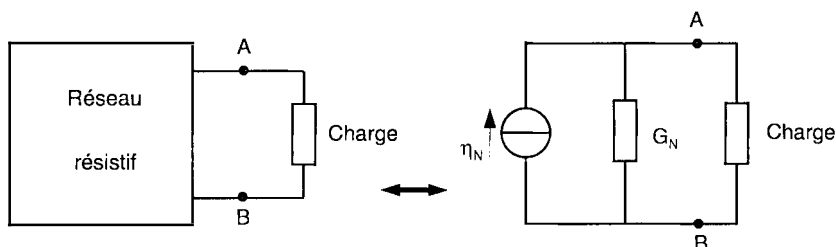
- on calcule (ou on mesure) l'intensité i du courant qui pénètre alors par la borne A.
- on en déduit ensuite R_T , par application de la loi d'Ohm :

$$R_T = \frac{u}{i}$$

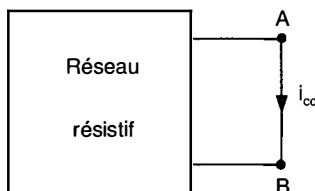


b) Théorème de Norton

Tout réseau résistif relié à une charge entre deux bornes A et B est équivalent, vu de cette charge, à un générateur de Norton constitué d'une source de courant de débit η_N en parallèle avec une conductance $G_N = 1/R_T$.



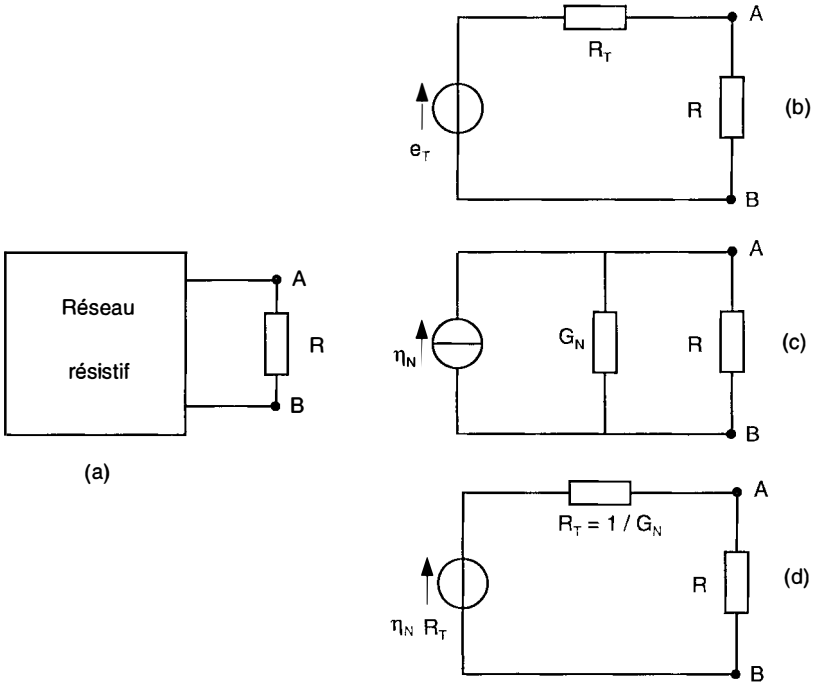
- η_N est le courant de court-circuit i_{cc} obtenu lorsqu'on relie les bornes A et B.



- $R_T = 1/G_N$ est la résistance interne du générateur de Thévenin équivalent au réseau.

6.4 Équivalence Thévenin-Norton

Nous avons montré au chapitre 3, paragraphe 3-2 qu'un générateur de tension peut être transformé en générateur de courant et inversement. Il existe donc une relation très étroite entre les équivalents de Thévenin et de Norton pour un réseau actif résistif.



Si on transforme l'équivalent de Norton (c) du réseau (a), on obtient une source de tension de f.é.m. $\eta_N R_T$ en série avec la résistance R_T (figure d). Par comparaison avec l'équivalent de Thévenin (b), on en déduit :

$$u_0 = e_T = R_T \eta_N = R_T i_{cc}$$

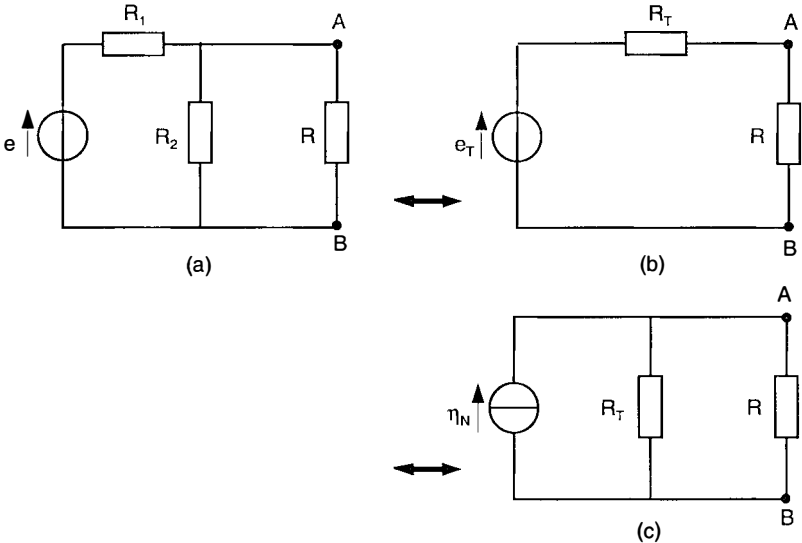
Cette équivalence peut être mise à profit pour déterminer la résistance interne des générateurs équivalents de circuits contenant à la fois des sources indépendantes et contrôlées : il suffit en effet de déterminer la tension u_0 en circuit ouvert, le courant de court-circuit i_{cc} , et d'effectuer ensuite le quotient $R_T = u_0 / i_{cc}$ de ces deux grandeurs.

Cette façon de procéder est souvent plus rapide que la méthode directe exposée au paragraphe 6.3. Elle offre en outre la possibilité d'utiliser ultérieurement l'un ou l'autre de ces équivalents.

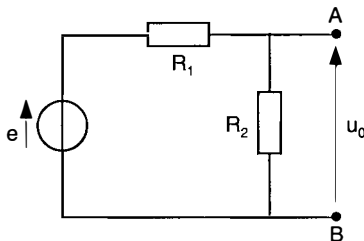
6.5 Exemples

6.5.1. PONT POTENTIOMÉTRIQUE

Cherchons les équivalents de Thévenin (b) et de Norton (c) du réseau (a) ci-dessous connecté à la charge R entre les bornes A et B :



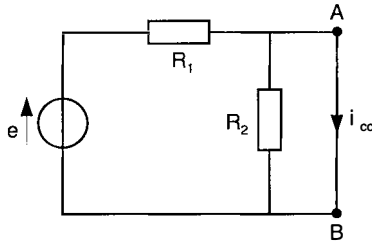
- e_T est la tension à vide u_0 entre A et B.



Le circuit obtenu lorsqu'on enlève la charge R est un diviseur de tension. On a donc :

$$e_T = u_0 = \frac{e R_2}{R_1 + R_2}$$

- η_N est le courant de court-circuit i_{cc} circulant de A vers B lorsque ces deux bornes sont reliées par un conducteur sans résistance.



Dans ce cas, le courant dans R_2 est nul, de sorte que :

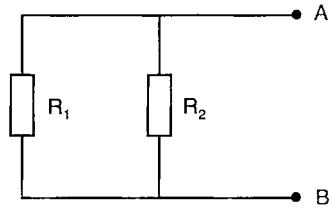
$$\eta_N = i_{cc} = \frac{e}{R_1}$$

- R_T est la résistance du dipôle AB lorsque la source de tension est remplacée par un court-circuit :

$$R_T = R_1 // R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

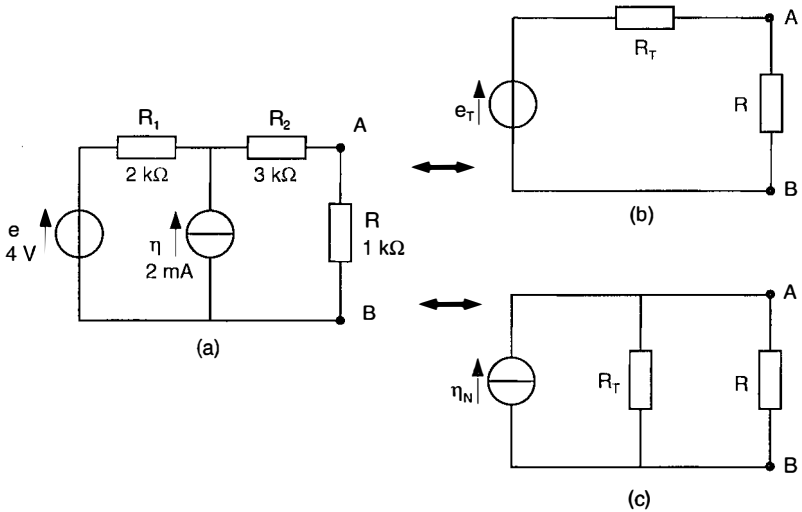
On remarque que R_T est bien égal au quotient :

$$R_T = \frac{e_T}{\eta_N} = \frac{u_0}{i_{cc}} = \frac{e R_2}{R_1 + R_2} \frac{R_1}{e}$$

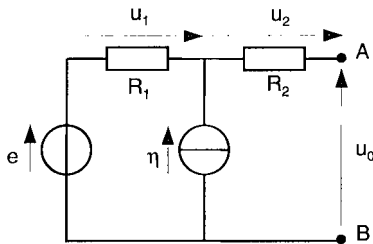


6.5.2. RÉSEAU COMPORTANT DEUX SOURCES INDÉPENDANTES

Déterminons les équivalents de Thévenin (b) et de Norton (c) du réseau (a) ci-dessous relié à la charge R entre les bornes A et B :



- e_T est la tension à vide u_0 entre A et B :



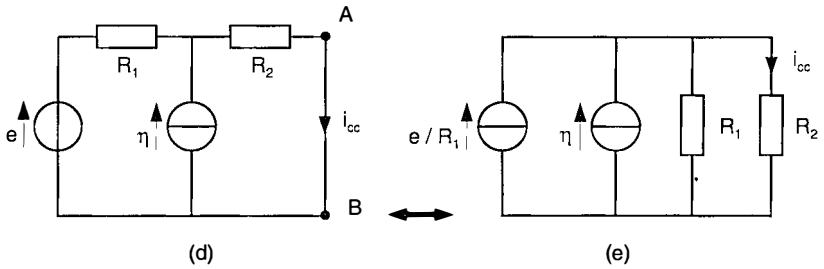
c'est la somme des tensions :

$$u_0 = e + u_1 + u_2$$

Le courant circulant dans R_2 est nul. De ce fait, la tension u_2 est également nulle et le courant circulant dans R_1 , en sens inverse de u_1 , est égal à η . On peut donc exprimer u_1 en fonction de η au moyen de la loi d'Ohm et en déduire u_0 :

$$u_0 = e_T = e + u_1 = e + R_1 \eta = 4 + 2 \cdot 2 = 8 \text{ V}$$

- η_N est le courant de court-circuit circulant de A vers B dans le réseau (d)

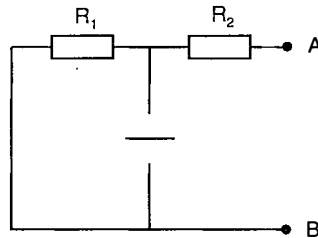


Le calcul de ce courant peut se faire au moyen du théorème de superposition. On peut aussi se ramener au diviseur de courant (e) et en déduire :

$$\eta_N = i_{cc} = \left(\frac{e}{R_1} + \eta \right) \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 4 \cdot \frac{2}{5} = 1,6 \text{ mA}$$

• R_T est la résistance du dipôle AB lorsque ses deux sources sont neutralisées, soit :

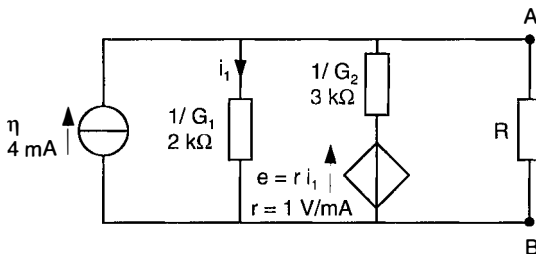
$$R_T = R_1 + R_2 = 5 \text{ k}\Omega$$



On vérifie que cette valeur est bien égale au quotient :

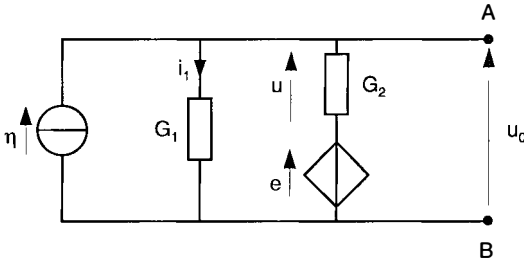
$$\frac{e_T}{\eta_N} = \frac{8}{1,6} = 5 \text{ k}\Omega$$

6.5.3. RÉSEAU COMPORTANT UNE SOURCE CONTROLÉE



Pour déterminer les équivalents de Thévenin et de Norton du réseau ci-dessus, vu par la charge R, calculons successivement :

- la d.d.p. à vide entre A et B :



Le circuit considéré est un circuit à deux nœuds : u_0 est la tension aux bornes de G_1 ; c'est aussi la somme $e + u$ des tensions aux bornes de la source contrôlée et de G_2 .

Pour résoudre ce circuit à deux nœuds, il suffit d'appliquer la loi des nœuds, par exemple en A :

$$\sum_{\rightarrow} G u = \sum_{\rightarrow} \eta$$

soit :

$$G_1 u_0 + G_2 u = \eta$$

avec :

$$u = u_0 - e = u_0 - r i_1$$

Le courant i_1 peut être remplacé par $G_1 u_0$:

$$u = u_0 - r G_1 u_0$$

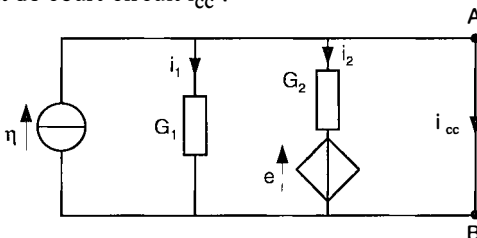
de sorte que η a pour expression :

$$\eta = (G_1 + G_2 - r G_1 G_2) u_0$$

et :

$$u_0 = e_T = \frac{\eta}{G_1 + G_2 - r G_1 G_2} = \frac{4}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}} = \frac{4.6}{4} = 6V$$

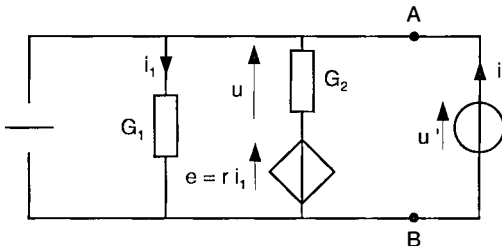
- le courant de court-circuit i_{cc} :



La d.d.p. entre les bornes A et B étant égale à zéro, les courants i_1 et i_2 sont nuls : i_{cc} est égal à η , c'est-à-dire à 4 mA.

- la résistance équivalente R_T au réseau neutralisé :

On relie le réseau neutralisé, qui conserve sa source contrôlée, à une source de tension de f.é.m. $u' = u_A - u_B$. On calcule le courant i qui pénètre alors dans le réseau par la borne A :



u' est la tension aux bornes de G_1 ; c'est aussi la somme $u + e$ des tensions aux bornes de G_2 et de la source contrôlée. La loi des nœuds s'écrit alors en A :

$$i = G_1 u' + G_2 u$$

avec :

$$u = u' - e = u' - r i_1 = u' - r G_1 u'$$

soit :

$$i = (G_1 + G_2 - r G_1 G_2) u'$$

R_T est égal par définition au quotient de u' par i :

$$R_T = \frac{1}{G_1 + G_2 - r G_1 G_2} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}} = \frac{6}{4} = 1,5 \text{ k}\Omega$$

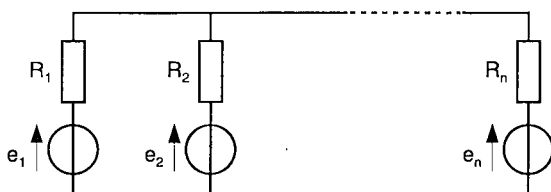
On vérifie que l'on a encore :

$$R_T = \frac{e_T}{\eta_N} = \frac{6}{4} = 1,5 \text{ k}\Omega$$

7 Théorème de Millman

Ce théorème fournit l'équivalent de Thévenin d'un réseau constitué par la mise en parallèle de générateurs de tension, autrement dit de dipôles

formés par l'association série de sources de tension et d'éléments résistifs (chapitre 3, § 3.5.2).

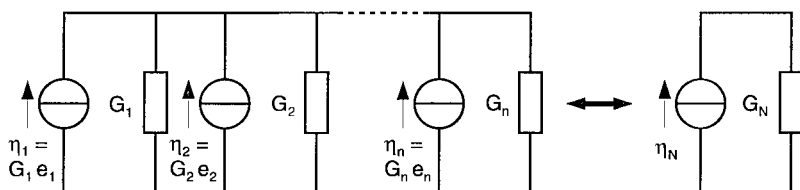


Si on remplace ces générateurs par les associations parallèles équivalentes sources de courant-éléments résistifs, on obtient immédiatement le générateur de Norton équivalent au réseau, de débit :

$$\eta_N = \sum_j G_j e_j$$

et de conductance :

$$G_N = \sum_j G_j$$



On en déduit la f.é.m. du générateur de Thévenin équivalent à l'association précédente :

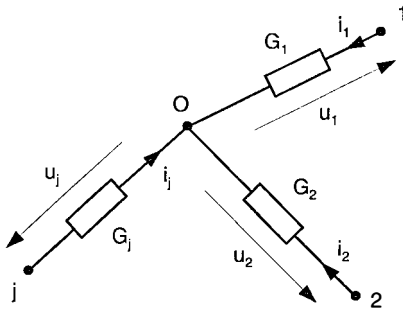
$$e_T = \frac{\sum G_j e_j}{\sum G_j}$$

et sa résistance interne :

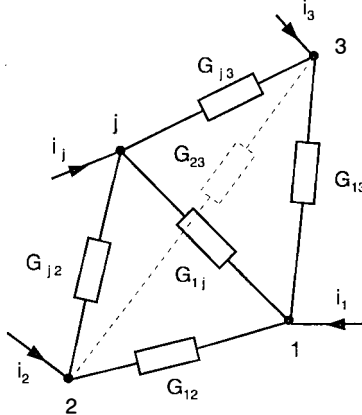
$$R_T = \frac{1}{\sum_j G_j}$$

8 Théorème de Kennely

Considérons le réseau étoilé ci-dessous formé par n conductances G_1, \dots, G_n reliées au nœud O.



Considérons d'autre part le réseau obtenu en reliant deux à deux les n sommets d'un polygone par des conductances G_{jk} .



On cherche à déterminer les conductances G_{jk} pour lesquelles les courants injectés aux nœuds 1, 2, ..., n sont les mêmes dans les deux configurations lorsque les potentiels de ces nœuds sont identiques.

Si on écrit les équations de nœuds pour le polygone, on obtient une série d'expressions du type :

$$i_1 = G_{12}(u_1 - u_2) + G_{13}(u_1 - u_3) + \dots + G_{1n}(u_1 - u_n)$$

soit :

$$[i_1 - (G_{12} + G_{13} + \dots + G_{1n})u_1] + G_{12}u_2 + G_{13}u_3 + \dots + G_{1n}u_n = 0$$

et ainsi de suite n fois. Pour l'étoile, on a simplement :

$$i_1 = G_1 u_1, i_2 = G_2 u_2, \dots, i_n = G_n u_n$$

Les potentiels étant les mêmes par hypothèse, on peut comparer les deux expressions :

$$G_1 u_1 + G_2 u_2 + \dots + G_n u_n = 0$$

$$[G_1 - (G_{12} + G_{13} + \dots + G_{1n})]u_1 + G_{12}u_2 + G_{13}u_3 + \dots + G_{1n}u_n = 0$$

et en tirant une relation entre les coefficients :

$$\frac{G_1 - (G_{12} + \dots + G_{1n})}{G_1} = \frac{G_{12}}{G_2} = \frac{G_{13}}{G_3} = \dots = \frac{G_{1n}}{G_n} = \frac{G_1}{G_1 + G_2 + \dots + G_n}$$

on en déduit : $G_{12} = \frac{G_1 \cdot G_2}{G_1 + \dots + G_n}$

et en généralisant :

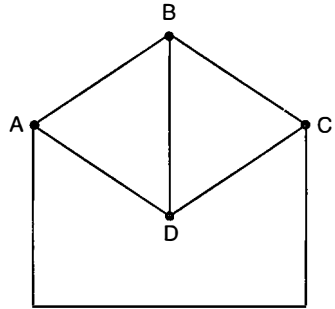
$$G_{jk} = \frac{G_j G_k}{\sum G_j}$$

Énoncés des exercices

Paramètres d'un réseau

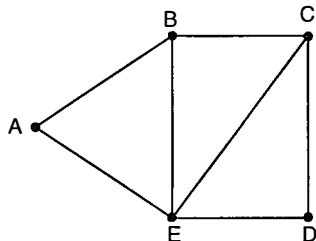
EXERCICE 4.1 :

- Calculez les paramètres N et B du réseau ci-contre, ainsi que le nombre de ses mailles indépendantes.
- On désire constituer un système de mailles indépendantes incluant la maille ABD. Quelles sont les solutions possibles ?



EXERCICE 4.2 :

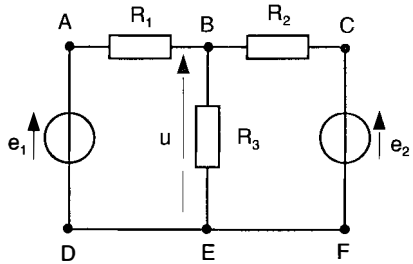
- Calculez les paramètres N et B du réseau ci-contre.
- Déterminez l'ensemble des systèmes de mailles indépendantes incluant les mailles ABE et ECD.



Méthode générale des courants de branches

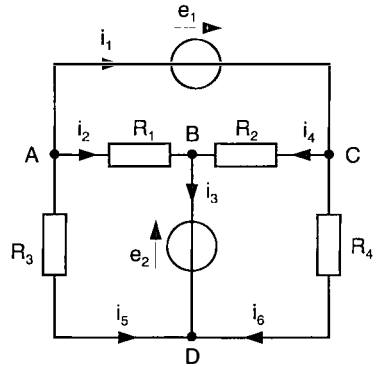
EXERCICE 4.3 :

- a) Déterminez les paramètres du réseau ci-contre.
 b) Calculez la tension u par la méthode générale des courants de branches.
 On donne : $e_1 = 2 \text{ V}$; $e_2 = 1 \text{ V}$;
 $R_1 = 2 \Omega$; $R_2 = 3 \Omega$; $R_3 = 1 \Omega$.



EXERCICE 4.4 :

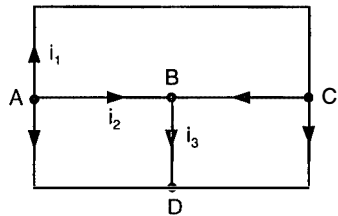
- a) Dans le réseau à 6 branches et 4 nœuds représenté ci-contre, explicitez les équations permettant de déterminer les courants inconnus.
 b) Montrez que l'on peut se ramener à un système de trois équations dans lequel les inconnues sont i_1 , i_2 , i_3 .



Méthode simplifiée des courants de branches

EXERCICE 4.5 :

- a) Déterminez en fonction de i_1 , i_2 , i_3 , les courants de branches inconnus circulant dans les sens indiqués sur la figure ci-contre.
 b) En choisissant les mêmes mailles indépendantes que dans l'exercice précédent, montrez que l'on aboutit directement aux mêmes équations.

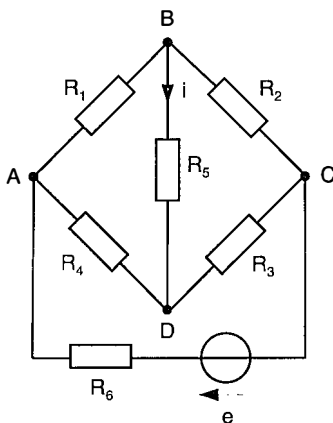


EXERCICE 4.6 :

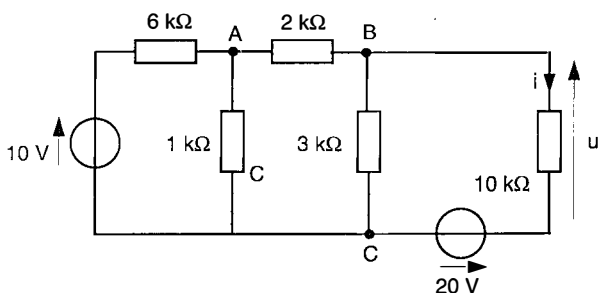
Traitez l'exercice 4.3 par la méthode simplifiée des courants de branches.

EXERCICE 4.7 :

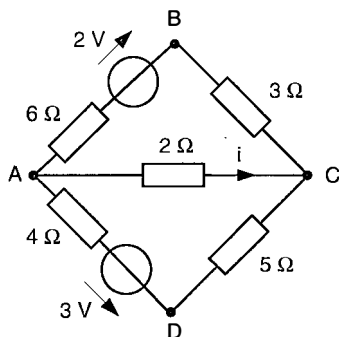
Déterminez à quelle condition doivent satisfaire les résistances R_1 , R_2 , R_3 , et R_4 pour que le courant i soit nul.

**EXERCICE 4.8 :**

Calculez i et u par la méthode des branches.

**EXERCICE 4.9 :**

Calculez l'intensité i du courant qui circule de A vers C par la méthode des branches.



Méthode des mailles

EXERCICE 4.10 :

Complétez comme suit l'exercice 4.2 :

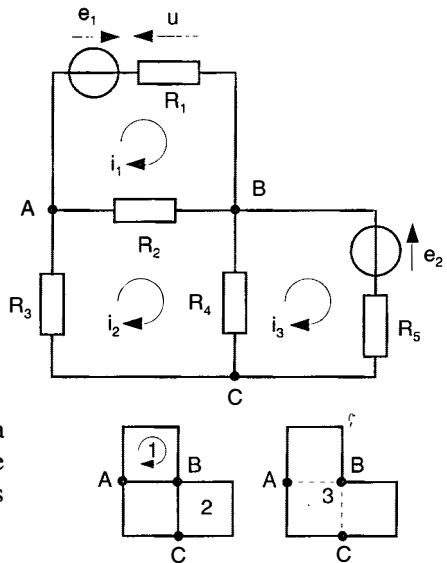
- Le courant de maille ABE étant orienté dans le sens des aiguilles d'une montre, choisissez le sens des autres courants de mailles.
- Quels sont les systèmes de mailles indépendantes permettant de calculer directement les courants circulant dans les branches BE et EC ?

EXERCICE 4.11 :

Le réseau ci-contre a fait l'objet d'une analyse au § 3.4.3.

- Calculez numériquement la tension u aux bornes de R_1 , pour $e_1 = 1 \text{ V}$, $e_2 = 2 \text{ V}$; $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$; $R_2 = 2 \text{ k}\Omega$; $R_3 = 3 \text{ k}\Omega$; $R_4 = 4 \text{ k}\Omega$; $R_5 = 5 \text{ k}\Omega$.

- Reprenez l'étude de ce réseau en sélectionnant les mailles indépendantes ci-contre. Montrez que la valeur numérique de u est la même dans les deux cas. Comparez les deux calculs.



EXERCICE 4.12 :

Traitez l'exercice 4.7 par la méthode des mailles.

EXERCICE 4.13 :

Traitez l'exercice 4.8 par la méthode des mailles.

EXERCICE 4.14 :

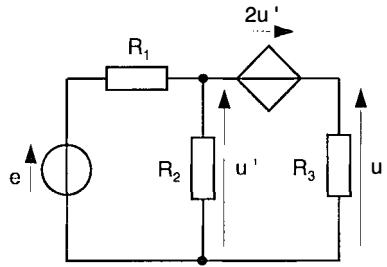
Traitez l'exercice 4.3 par la méthode des mailles.

EXERCICE 4.15 :

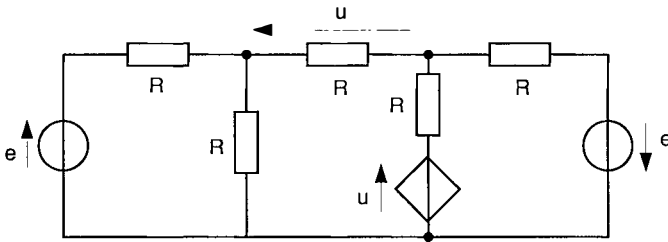
On considère le réseau ci-contre comportant une source de tension indépendante et une source de tension contrôlée.

Calculez la tension u par la méthode des mailles.

On donne : $e = 5 \text{ V}$; $R_1 = 1 \Omega$;
 $R_2 = 4 \Omega$; $R_3 = 2 \Omega$.

**EXERCICE 4.16 :**

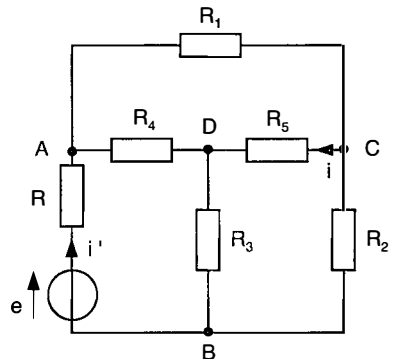
Calculez la tension u en fonction de e .

**EXERCICE 4.17 :**

Calculez par la méthode des mailles :

- Les courants i et i' en fonction de e .
- La résistance R' équivalente au dipôle AB vue par le générateur (e, R).
- Le rapport p/p' entre la puissance p absorbée par R_5 et la puissance p' fournie par le générateur (e, R).

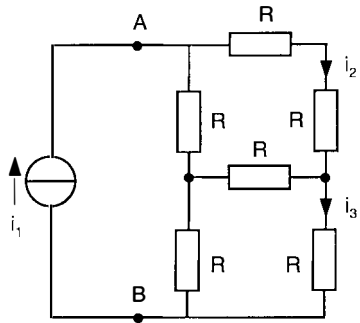
On donne : $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$; $R_2 = 2 \text{ k}\Omega$;
 $R_3 = 3 \text{ k}\Omega$; $R_4 = 4 \text{ k}\Omega$; $R_5 = 10 \text{ k}\Omega$;
 $R = 8 \text{ k}\Omega$.



EXERCICE 4.18 :

Dans le réseau ci-contre, la source de courant débite un courant $i_1 = 11$ mA. Les six résistances ont même valeur : $R = 1$ k Ω .

- Calculez numériquement les courants i_2 et i_3 .
- Déterminez la résistance équivalente au réseau vue par la source de courant entre les bornes A et B.

**Méthode des nœuds****EXERCICE 4.19 :**

Traitez l'exercice 4.8 par la méthode des nœuds.

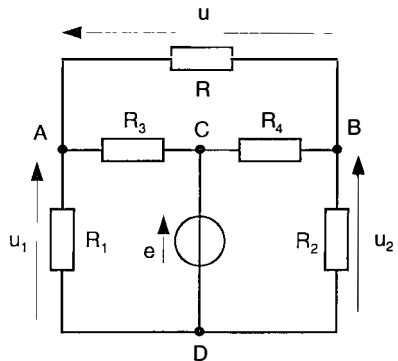
EXERCICE 4.20 :

- Explicitiez sous forme littérale les équations de nœuds permettant de déterminer les tensions u_1 et u_2 en fonction de la f.é.m. e .

A.N. : $R_1 = 1$ k Ω ; $R_2 = 0,5$ k Ω ;
 $R_3 = 0,33$ k Ω ; $R_4 = 0,25$ k Ω ;
 $R = 0,1$ k Ω ; $e = 12,4$ V

- Calculez numériquement les grandeurs suivantes :

- la d.d.p. u aux bornes de R ,
- la puissance p fournie par la source de tension,
- la résistance équivalente au réseau, vue par la source de tension.

**EXERCICE 4.21 :**

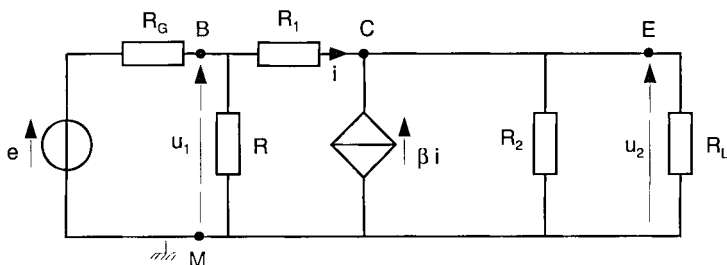
Traitez la première question de l'exercice 4.17 par la méthode des nœuds.

EXERCICE 4.22 :

Traitez l'exercice 4.16 par la méthode des nœuds.

EXERCICE 4.23 :

- Ecrivez sous forme littérale ordonnée les équations de nœuds permettant la résolution du réseau ci-dessous :



b) Déduisez-en les valeurs numériques des rapports $A = u_2/u_1$, $A' = u_2/e$, $A'' = u_1/e$, et $Y = i/e$ en précisant les unités.

c) Calculez le gain en puissance $G_P = p/p'$, où p' représente la puissance fournie par le générateur (e , R_G) et p la puissance absorbée par la charge R_L . On donne :

$$R_G = R = 2 \text{ k}\Omega ; R_L = 200 \text{ }\Omega ; R_1 = 1 \text{ k}\Omega ; R_2 = 4 \text{ k}\Omega ; \beta = 25$$

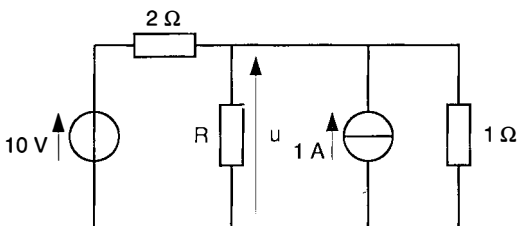
Théorème de superposition

EXERCICE 4.24 :

Traitez l'exercice 4.3 par le théorème de superposition.

EXERCICE 4.25 :

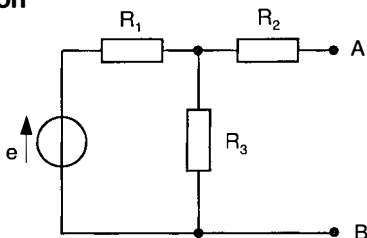
Déterminez la valeur de R pour laquelle la tension u est égale à 2 V.



Théorèmes de Thévenin et de Norton

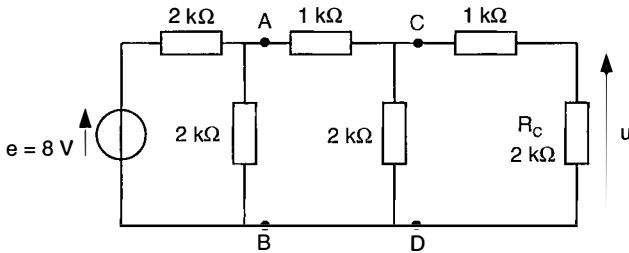
EXERCICE 4.26 :

Déterminez les générateurs de Thévenin et de Norton équivalents au dipôle représenté ci-contre.



EXERCICE 4.27 :

Déterminez la tension u aux bornes de la résistance de charge R_C par application du théorème de Thévenin entre A et B, puis C et D.

**EXERCICE 4.28 :**

Traitez l'exercice 4.3 par application du théorème de Thévenin.

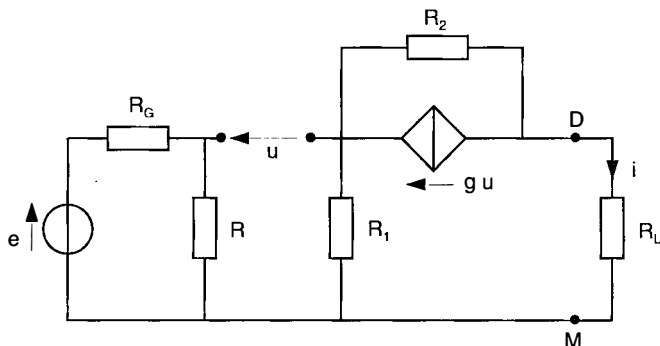
EXERCICE 4.29 :

Traitez l'exercice 4.23 par application des théorèmes de Thévenin et de Norton en prenant les mêmes valeurs numériques :

- Calculez la d.d.p. $u_0 = f(e)$ qui apparaîtrait entre les bornes E et M si la charge R_L était déconnectée.
- Calculez le courant $i_{cc} = g(e)$ qui circulerait de E vers M si la charge R_L était court-circuitée.
- Déduisez-en la résistance interne R_T du générateur équivalent au montage, vu par la charge R_L entre les bornes E et M.
- Retrouvez par un calcul direct la valeur de R_T (R_T est la "résistance de sortie du montage" notée r_s).
- En utilisant le générateur de Thévenin ou de Norton équivalent au montage, calculez le gain en tension $A' = u_2/e$.
- Calculez la résistance équivalente au montage vu par le générateur (e , R_G) entre les bornes B et M (cette résistance notée r_e est la "résistance d'entrée" du montage).

EXERCICE 4.30 :

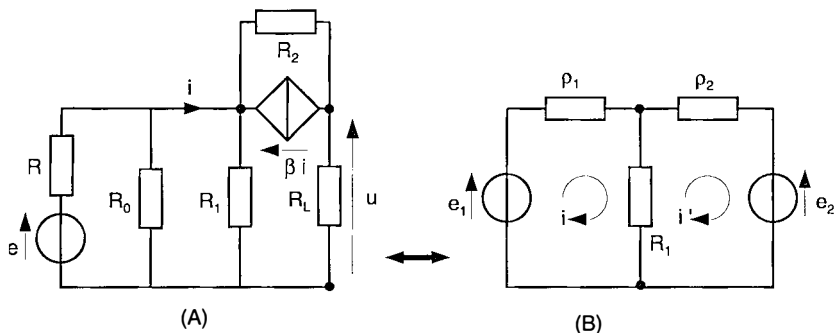
- Déterminez la f.é.m. e_T et la résistance interne R_T du générateur de Thévenin équivalent au montage vu par la charge R_L entre les bornes de sortie D et M.



b) Déduisez-en le courant de sortie i . On donne : $R_G = R = 2 \text{ k}\Omega$; $R_1 = 200 \Omega$; $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$; $R_L = 4,8 \text{ k}\Omega$; $g = 5 \text{ mA/V}$.

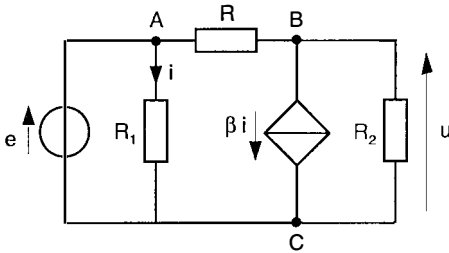
EXERCICE 4.31 :

- Le réseau A peut être converti sous la forme B. Indiquez la valeur de chaque élément du schéma B en fonction des éléments de A.
- Donnez, sous forme littérale ordonnée, les équations de mailles permettant la résolution du réseau B.
- Calculez i et u en fonction de e .
- Calculez le gain en puissance $G_P = p/p'$, où p représente la puissance absorbée par la charge R_L et p' la puissance fournie par le générateur (e, R).
On donne : $R = R_0 = R_L = 2 \text{ k}\Omega$; $R_1 = 200 \Omega$; $R_2 = 8 \text{ k}\Omega$; $\beta = 40$.



EXERCICE 4.32 :

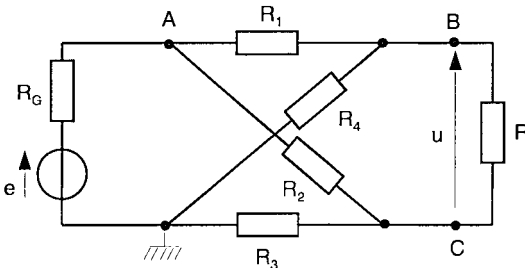
On considère le réseau ci-dessous :



- Ecrivez la loi des nœuds en B en prenant comme inconnue u .
- Déduisez-en le gain en tension $A = u/e$ en fonction de β , R , R_1 et R_2 .
- On enlève la charge R_2 . Que vaut alors le courant qui circule dans R de A vers B ? Exprimez la tension à vide u_0 entre B et C en fonction de e , β , R_1 , R .
- On court-circuite les bornes B et C. Que vaut alors la tension u ? Déterminez le courant i_{cc} qui circule dans le court-circuit de B vers C en fonction de e , β , R_1 et R .
- Déterminez à partir des résultats précédents la résistance interne du générateur de Thévenin vu par la charge R_2 entre B et C.
- Retrouvez l'expression du gain en tension en introduisant le générateur de Thévenin.

EXERCICE 4.33 :

- Déterminez les générateurs de Thévenin et de Norton équivalents au montage vu par la résistance R entre les bornes B et C.

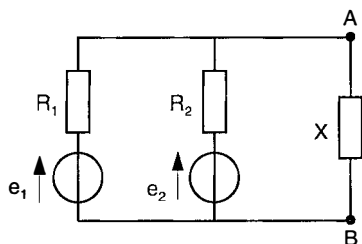


- Déduisez-en la tension u . On donne : $e = 10\text{V}$; $R_G = 2,5\text{ k}\Omega$; $R_1 = 1\text{ k}\Omega$; $R_2 = 2\text{ k}\Omega$; $R_3 = 3\text{ k}\Omega$; $R_4 = 4\text{ k}\Omega$; $R = 450\ \Omega$.

Théorèmes de Millman et de Kennely

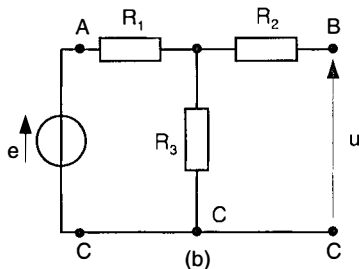
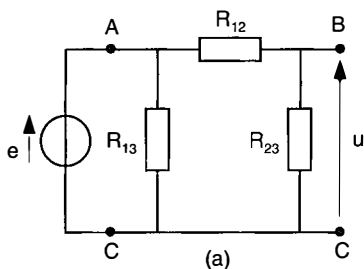
EXERCICE 4.34 :

Déterminez le générateur de tension équivalent au réseau connecté au dipôle X, par application du théorème de Millman.



EXERCICE 4.35 :

On considère les réseaux (a) et (b) représentés ci-dessous, alimentés par une source de tension de f.é.m. e , appelés respectivement réseau en π ou triangle, et réseau en T ou étoile. Cherchez les relations auxquelles doivent satisfaire les résistances R_i et R_{ij} pour que les tensions u soient les mêmes.



EXERCICE 4.36 :

- Transformez le réseau de l'exercice 4.7 en remplaçant le "triangle" ABD par "l'étoile" équivalente.
- Calculez numériquement le courant i que débite le générateur de tension pour $e = 10\text{V}$; $R_1 = R_4 = 1\text{ k}\Omega$; $R_2 = R_3 = 2\text{ k}\Omega$; $R_5 = R_6 = 0,1\text{ k}\Omega$.
- Calculez numériquement i .

Réseaux R L C en régime permanent sinusoïdal

1 Généralités

1.1 Définitions

- Un signal est dit périodique, de période T , si l'une de ses grandeurs caractéristiques $s(t)$ (intensité, d.d.p., ...) prend la même valeur, en variant dans le même sens, à l'instant $t + T$ qu'à l'instant t quelconque :

$$s(t + T) = s(t)$$

- Un signal est dit alternatif, s'il est périodique de période T , et si la valeur de l'une de ses grandeurs caractéristiques à l'instant $t + T/2$ est l'opposée de sa valeur à l'instant t :

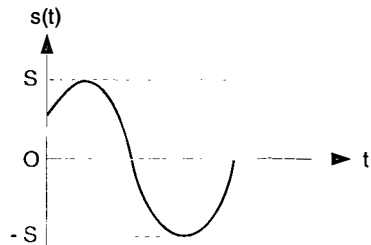
$$s(t + T/2) = -s(t) = -s(t + T)$$

- Un signal est dit alternatif sinusoïdal, si $s(t)$ est une fonction sinusoïdale du temps :

$$s = s(t) = S \cos(\omega t + \varphi)$$

Dans cette expression :

- S est l'amplitude du signal $s(t)$
- $\omega = 2\pi\nu$ est sa pulsation, $\nu = \frac{1}{T}$ sa fréquence.
- φ est sa phase.



1.2 Valeurs moyennes et efficaces

1.2.1. QUANTITÉ D'ÉLECTRICITÉ

Entre les instants 0 et t, la quantité d'électricité transportée par un courant alternatif sinusoïdal d'intensité $i = I \cos \omega t$ est :

$$\begin{aligned} q_t &= \int_0^t i \, dt = \int_0^t I \cos \omega t \, dt \\ &= \frac{I}{\omega} [\sin \omega t]_0^t = \frac{I}{\omega} \sin \omega t \end{aligned}$$

Sur un laps de temps égal à une période :

$$q_T = \int_0^T I \cos \omega t \, dt = 0$$

La quantité d'électricité traversant une section droite d'un conducteur pendant une période est nulle.

1.2.2. VALEUR MOYENNE DE L'INTENSITÉ

La valeur moyenne de l'intensité entre les instants 0 et t est la quantité :

$$\bar{i}_t = \frac{1}{t} \int_0^t i \, dt = \frac{I}{\omega t} \sin \omega t$$

Elle est nulle sur un laps de temps égal à une période :

$$\bar{i}_T = 0$$

1.2.3. VALEUR QUADRATIQUE MOYENNE DE L'INTENSITÉ

La valeur quadratique moyenne de l'intensité entre les instants 0 et t est par définition la valeur moyenne de i^2 :

$$\overline{i_t^2} = \frac{1}{t} \int_0^t i^2 \, dt = \frac{1}{t} \int_0^t I^2 \cos^2 \omega t \, dt$$

si $t = T$:

$$\begin{aligned}\overline{i_T^2} &= \frac{1}{T} \int_0^T I^2 \frac{(1 + \cos 2\omega t)}{2} dt \\ &= \frac{I^2}{2T} \left[t + \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t \right]_0^T\end{aligned}$$

soit :

$$\overline{i_T^2} = \frac{I^2}{2}$$

1.2.4. INTENSITÉ EFFICACE

La quantité de chaleur W dissipée par effet Joule, pendant une période, dans une résistance R parcourue par un courant périodique quelconque i de période T a pour expression :

$$W = \int_0^T R i^2 dt = R \int_0^T i^2 dt = RT \overline{i_T^2}$$

posons :

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\overline{i_T^2}}$$

W s'écrit dans ces conditions :

$$W = R I_{\text{eff}}^2 T$$

C'est la quantité de chaleur qui serait dissipée si la résistance était parcourue par un courant continu d'intensité I_{eff} . Cette quantité représente, par définition, l'intensité efficace :

L'intensité efficace d'un courant périodique est l'intensité du courant continu produisant la même dissipation d'énergie par effet Joule.

En utilisant les résultats du paragraphe précédent, on établit le résultat suivant :

L'intensité efficace d'un courant sinusoïdal d'amplitude I est $I_{\text{eff}} = \frac{I}{\sqrt{2}}$

Attention :

- La relation $I_{\text{eff}} = \frac{I}{\sqrt{2}}$ n'est valable qu'en régime sinusoïdal.
- Les appareils de mesure dotés de calibres repérés par le symbole \sim sont généralement conçus pour fournir des valeurs efficaces de tensions ou d'intensités sinusoïdales. Leurs indications sont donc fausses pour des mesures réalisées en régime périodique non sinusoïdal, sauf s'il s'agit d'appareils portant l'indication "RMS".

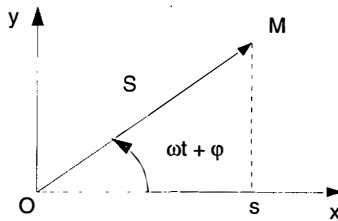
2 Représentation d'une grandeur sinusoïdale

2.1 Représentation vectorielle

On peut associer à une grandeur sinusoïdale :

$$s = S \cos(\omega t + \varphi)$$

un vecteur \vec{OM} appelé vecteur de Fresnel, de norme S , tournant dans le sens trigonométrique à la vitesse angulaire ω . Ce vecteur fait à l'instant t l'angle $\omega t + \varphi$ avec Ox .



La projection de \vec{OM} sur l'axe Ox , est égale à :

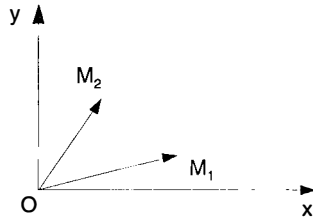
$$S \cos(\omega t + \varphi)$$

et représente donc la grandeur s elle-même.

Cette représentation peut être utilisée pour additionner des grandeurs sinusoïdales de même pulsation ω , dont les phases sont différentes. Considérons par exemple les deux grandeurs :

$$s_1 = S_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$s_2 = S_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$



représentées respectivement par les vecteurs \vec{OM}_1 et \vec{OM}_2 . La somme de ces deux grandeurs est égale à la somme des projections des vecteurs \vec{OM}_1 et \vec{OM}_2 :

$$s_1 + s_2 = \text{proj}(\vec{OM}_1) + \text{proj}(\vec{OM}_2)$$

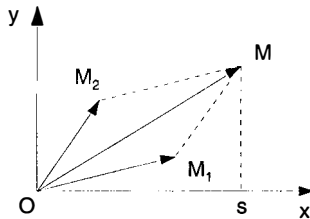
Cette somme des projections est aussi égale à la projection du vecteur $\vec{OM}_1 + \vec{OM}_2$:

$$\text{proj}(\vec{OM}_1) + \text{proj}(\vec{OM}_2) = \text{proj}(\vec{OM}_1 + \vec{OM}_2)$$

Il est donc possible de trouver la valeur :

$$s = s_1 + s_2$$

par une méthode graphique, en composant tout d'abord les vecteurs \vec{OM}_1 et \vec{OM}_2 , et en projetant ensuite leur résultante sur l'axe Ox.



2.2 Représentation complexe

2.2.1. GÉNÉRALITÉS

Pour éviter toute ambiguïté, on utilise dans ce cours les notations suivantes :

- On souligne les nombres complexes pour les distinguer des réels.

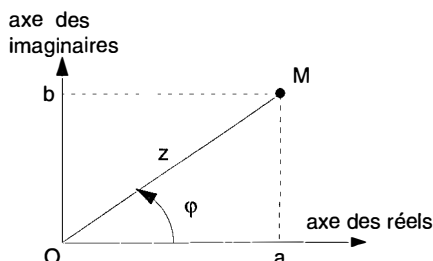
- On désigne par j le nombre tel que $j^2 = -1$.

Avec ces notations, un nombre complexe peut toujours se mettre sous l'une ou l'autre des formes équivalentes :

$$\underline{Z} = a + jb \quad \text{forme cartésienne}$$

$$\underline{Z} = Z(\cos \varphi + j \sin \varphi) = Z e^{j\varphi} \quad \text{forme trigonométrique}$$

A ce nombre complexe est associé un point M dans le plan complexe.



- Les coordonnées cartésiennes a et b de ce point représentent respectivement les parties réelle et imaginaire de \underline{Z} :

$$a = \Re[\underline{Z}] = Z \cos \varphi$$

$$b = \Im[\underline{Z}] = Z \sin \varphi$$

- Les coordonnées polaires Z et φ du point M représentent respectivement le module et l'argument de \underline{Z} :

$$Z = |\underline{Z}|$$

$$\varphi = \text{Arg}[\underline{Z}]$$

Dans la plupart des cas, on effectue tout d'abord des opérations sur des nombres complexes écrits sous forme cartésienne, et on cherche en fin de calcul à présenter le résultat sous forme trigonométrique. Il faut donc savoir exprimer Z et φ à partir de a et b :

- Le module Z du nombre complexe \underline{Z} peut être évalué géométriquement au moyen du théorème de Pythagore :

$$|\underline{Z}| = Z = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- L'argument de \underline{Z} doit être calculé différemment suivant le signe de a :

$$\begin{aligned} \varphi = \text{Arg}[Z] &= \text{Arc tg}[b/a] && \text{si } a > 0 \\ &= \pi + \text{Arc tg}[b/a] && \text{si } a < 0 \end{aligned}$$

On aboutit très souvent à des expressions générales de la forme :

$$\underline{Z} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{Z_1}{Z_2}$$

- Le module de ce nombre complexe est :

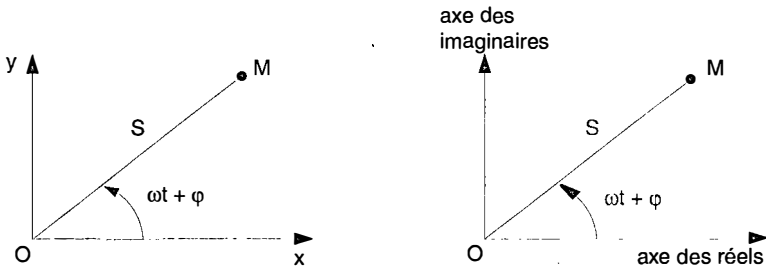
$$Z = |\underline{Z}| = \frac{Z_1}{Z_2} = \sqrt{\frac{a_1^2 + b_1^2}{a_2^2 + b_2^2}}$$

- Son argument est :

$$\varphi = \text{Arg}[Z_1] - \text{Arg}[Z_2]$$

2.2.2. PRINCIPE DE LA REPRÉSENTATION

Dans la représentation de Fresnel, on associe au signal $s = S \cos(\omega t + \varphi)$ le point M situé à la distance S de l'origine O, dans la direction faisant l'angle $\omega t + \varphi$ avec l'axe Ox.



A ce même point M correspond, dans le plan complexe, le nombre complexe :

$$\underline{s} = S e^{j(\omega t + \varphi)} = S [\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)]$$

Dans la représentation de Fresnel, la projection du point M sur l'axe Ox restitue le signal s à l'instant t . Dans le plan complexe, la projection de ce point sur l'axe des réels restitue de la même manière le signal à l'instant t :

$$s = \Re[\underline{s}] = S \cos(\omega t + \varphi)$$

La méthode des nombres complexes peut donc être utilisée, par analogie avec la méthode de Fresnel, pour additionner des signaux de même pulsation, mais de phases différentes.

Si :

$$s_1 = S_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$s_2 = S_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

on a :

$$s = s_1 + s_2 = \Re e \left[e^{j\omega t} S e^{j\varphi} \right] = \Re e \left[\underline{s}_1 + \underline{s}_2 \right] = \Re e \left[e^{j\omega t} \left\{ S_1 e^{j\varphi_1} + S_2 e^{j\varphi_2} \right\} \right]$$

Pour éviter d'alourdir inutilement les calculs, on convient de faire abstraction des exponentielles $e^{j\omega t}$, en associant à tout signal sinusoïdal $s = S \cos(\omega t + \varphi)$ son amplitude complexe :

$$\underline{S} = S e^{j\varphi}$$

Dans ces conditions :

L'amplitude complexe \underline{S} de la somme $s = s_1 + s_2$ de deux signaux sinusoïdaux de même pulsation ω est la somme de leurs amplitudes complexes :

$$\underline{S} = \underline{S}_1 + \underline{S}_2$$

De plus :

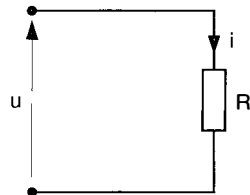
- Le module de \underline{S} est l'amplitude du signal.
- L'argument de \underline{S} est la phase de ce signal.

$$s = |\underline{S}| \cos(\omega t + \text{Arg}[\underline{S}])$$

3 Propriétés des dipôles passifs en régime sinusoïdal

3.1 Résistor

Si on applique une tension $u = U \cos(\omega t + \varphi)$ aux bornes d'un résistor, celui-ci est parcouru, conformément à la loi d'Ohm, par un courant d'intensité :

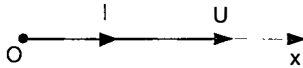


$$i = \frac{u}{R} = \frac{U}{R} \cos(\omega t + \varphi) = I \cos(\omega t + \varphi)$$

On remarque que ce courant est en phase avec la tension et que son amplitude a pour valeur :

$$I = \frac{U}{R}$$

Sur le diagramme de Fresnel représenté à l'instant $t = -\frac{\varphi}{\omega}$ où $\omega t + \varphi = 0$, les vecteurs associés à u et à i , de longueur respectives U et $I = \frac{U}{R}$ sont portés par l'axe des x :



En notations complexes, on associe respectivement à u et à i les amplitudes complexes :

$$\underline{U} = U e^{j\varphi} = R I e^{j\varphi}$$

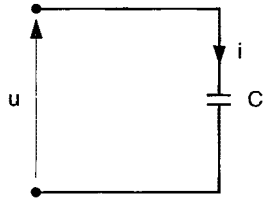
$$\underline{I} = I e^{j\varphi}$$

Ces 2 grandeurs satisfont à la relation linéaire :

$$\underline{U} = R \underline{I}$$

3.2 Condensateur

Un condensateur parfait est un dipôle traversé par un courant proportionnel à la dérivée par rapport au temps de la d.d.p. appliquée entre ses bornes.



A condition d'orienter en sens inverses les flèches associées à u et à i , cette propriété peut se traduire par la relation :

$$i = C \frac{du}{dt}$$

C est la capacité du condensateur exprimée en farads, de symbole F . Si on lui applique une tension :

$$u = U \cos(\omega t + \varphi)$$

le courant a pour expression :

$$\begin{aligned}
 i &= C \frac{du}{dt} = -\omega C U \sin(\omega t + \varphi) \\
 &= \omega C U \cos\left[\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right] \\
 &= I \cos\left[\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right]
 \end{aligned}$$

On constate que :

Dans un condensateur parfait, le courant est en avance de phase de $\frac{\pi}{2}$ sur la tension entre ses bornes.

L'amplitude du courant est liée à celle de la tension par la relation :

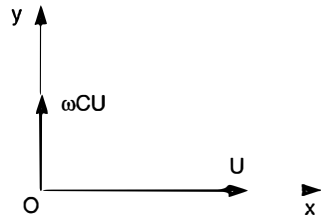
$$I = \omega C U$$

Sur le diagramme de Fresnel représenté à l'instant où $\omega t + \varphi = 0$:

- le vecteur associé à u , de longueur U , est porté par l'axe des x .

- le vecteur associé à :

$i = \omega C U \cos \frac{\pi}{2} = 0$, de longueur $\omega C U$, est dirigé suivant les y positifs.



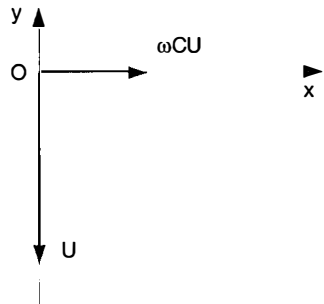
On peut refaire cette construction à un autre instant, par exemple lorsque $\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2} = 0$:

- le vecteur associé à :

$u = U \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ est alors dirigé vers les $y < 0$.

- le vecteur associé à :

$i = \omega C U \cos(0)$ est alors dirigé suivant les $x > 0$.



En notations complexes, on associe respectivement à u et à i les amplitudes complexes :

$$\underline{U} = U e^{j\varphi}$$

$$\begin{aligned} \underline{I} &= I e^{j\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} = \omega C U e^{j\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} = \omega C U e^{j\varphi} e^{j\frac{\pi}{2}} \\ &= j \omega C \underline{U} \end{aligned}$$

puisque $e^{j\frac{\pi}{2}} = j$.

On constate que ces deux grandeurs satisfont aux relations linéaires:

$$\underline{I} = j \omega C \underline{U} \quad \underline{U} = \frac{-j}{\omega C} \underline{I}$$

Remarque :

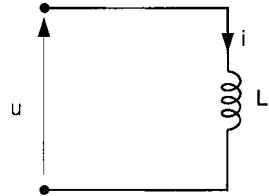
Ce résultat peut s'établir directement à partir de signaux complexes :

$$\dot{i} = \underline{I} e^{j\omega t} = C \frac{d\underline{u}}{dt} = C \underline{U} \frac{d}{dt} (e^{j\omega t}) = j \omega C \underline{U} e^{j\omega t}$$

Il résulte du fait que la dérivation d'un signal complexe par rapport au temps équivaut à sa multiplication par $j\omega$.

3.3 Bobine

Une bobine parfaite est un dipôle qui présente entre ses bornes une tension proportionnelle à la dérivée par rapport au temps du courant qui le traverse.



A condition d'orienter en sens inverses les flèches associées à u et à i , cette propriété peut se traduire par la relation :

$$u = L \frac{di}{dt}$$

L est l'inductance du dipôle, exprimée en henrys de symbole H. Si on désigne le courant traversant l'inductance par :

$$i = I \cos(\omega t + \varphi)$$

la tension entre ses bornes a pour valeur :

$$\begin{aligned} u &= L \frac{di}{dt} = -\omega L I \sin(\omega t + \varphi) \\ &= \omega L I \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= U \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

On constate que :

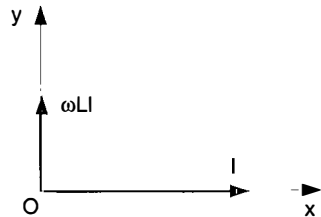
Dans une bobine parfaite, la tension est en avance de phase de $\pi/2$ sur le courant.

L'amplitude de cette tension est liée à celle du courant par la relation :

$$\underline{U} = \omega L \underline{I}$$

Sur le diagramme de Fresnel représenté à l'instant où $\omega t + \varphi = 0$:

- le vecteur associé à i , de longueur I est dirigé suivant les x positifs.
- le vecteur associé à u , de longueur $\omega L I$ est dirigé vers les y positifs.



En notations complexes, on associe respectivement à u et à i les amplitudes complexes :

$$\begin{aligned} \underline{U} &= U e^{j\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} = \omega L I e^{j\varphi} e^{j\frac{\pi}{2}} = j \omega L I e^{j\varphi} \\ \underline{I} &= I e^{j\varphi} \end{aligned}$$

On constate que ces deux grandeurs satisfont la relation linéaire :

$$\underline{U} = j \omega L \underline{I}$$

Ce résultat peut s'établir directement à partir des signaux complexes.

4 Méthodes d'analyse des réseaux en régime sinusoïdal

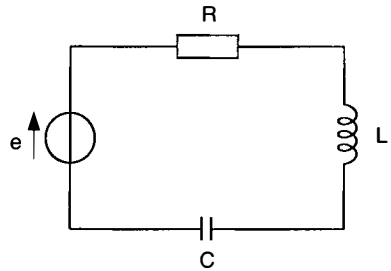
Lorsqu'on analyse un réseau RLC en régime sinusoïdal, on cherche à déterminer suivant le cas, les B courants de branches ou les tensions correspondantes. Nous allons montrer qu'il est possible d'utiliser à priori trois

méthodes différentes, mais que parmi celles-ci, la méthode des amplitudes complexes est de loin la plus commode, dans la mesure où elle permet d'utiliser les techniques développées pour les réseaux résistifs.

4.1 Méthode directe

Considérons le réseau à une maille ci-contre alimenté par une source de tension de f.é.m. :

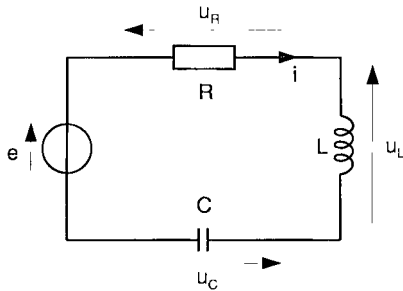
$$e = E \cos(\omega t + \varphi_e) :$$



On peut étudier ce réseau par simple application de la loi des mailles :

$$\sum_{\rightarrow M} u = 0$$

Pour cela, on commence par choisir arbitrairement un sens pour le courant : par exemple celui de la flèche associée à e . Ce choix détermine à la fois la valeur des tensions aux bornes des dipôles passifs et le sens des flèches associées.



On obtient alors la relation :

$$e = u_R + u_L + u_C$$

$$e = R i + \frac{L di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt$$

On peut résoudre cette équation intégral-différentielle en cherchant une solution de la forme $i = I \cos(\omega t + \varphi_i)$ pour laquelle :

$$u_R = Ri = RI \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$u_L = \omega LI \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \varphi_i\right)$$

$$u_C = \frac{I}{\omega C} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2} + \varphi_i\right)$$

L'équation de maille s'exprime alors sous la forme :

$$E \cos(\omega t + \varphi_e) = I \left[R \cos(\omega t + \varphi_i) + \omega L \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \varphi_i\right) + \frac{1}{\omega C} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2} + \varphi_i\right) \right]$$

Effectuons le changement de variable :

$$\omega t' = \omega t + \varphi_i$$

qui implique :

$$\omega t + \varphi_e = \omega t' + \varphi_e - \varphi_i$$

Posons d'autre part :

$$\varphi = \varphi_e - \varphi_i$$

la relation précédente devient :

$$E \cos(\omega t' + \varphi) = I \left[R \cos \omega t' + \omega L \cos\left(\omega t' + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\omega C} \cos\left(\omega t' - \frac{\pi}{2}\right) \right]$$

soit :

$$E \left[\cos \omega t' \cos \varphi - \sin \omega t' \sin \varphi \right] = I \left[R \cos \omega t' + \omega L \cos \omega t' \cdot \cos \frac{\pi}{2} - \omega L \sin \omega t' \cdot \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\omega C} \cos \omega t' \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{\omega C} \sin \omega t' \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right]$$

On se ramène alors aux 2 équations :

$$E \cos \omega t' \cos \varphi = I \cos \omega t' \cdot R$$

$$E \sin \omega t' \sin \varphi = I \sin \omega t' \left[\omega L - \frac{1}{\omega C} \right]$$

d'où l'on déduit :

$$E^2 = I^2 \left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]$$

soit :

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

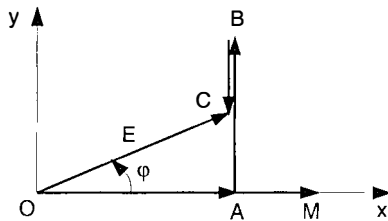
et :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \operatorname{tg}(\varphi_e - \varphi_i)$$

4.2 Méthode de Fresnel

Pour résoudre le réseau précédent, on peut construire son diagramme de Fresnel à un instant particulier, par exemple à l'instant où le vecteur \vec{OM} de longueur I , associé au courant $i = I \cos(\omega t + \varphi_i)$ est porté par l'axe des x .
A cet instant :

- le vecteur \vec{OA} associé à u_R , de longueur $U_R = RI$, est colinéaire à ce vecteur, puisque le courant et la tension sont en phase dans un élément résistif.
- le vecteur \vec{AB} associé à u_L , de longueur $U_L = \omega LI$ est dirigé vers les $y > 0$, puisque la tension est en avance de phase de $\pi/2$ sur le courant dans une inductance.
- le vecteur \vec{BC} associé à u_C , de longueur $U_C = \frac{I}{\omega C}$ est dirigé vers les $y < 0$, puisque le courant est en avance de phase de $\pi/2$ sur la tension dans un condensateur.



La résultante \vec{OC} de ces trois vecteurs est associée à la tension totale aux bornes de ces trois dipôles, autrement dit à la f.é.m. e de la source de tension.

- La longueur OC de ce vecteur est égale à E .

• L'angle $\varphi = \varphi_e - \varphi_i$ qu'il fait avec Ox représente le déphasage de e par rapport à i .

A l'instant $t = -\varphi_i/\omega$ où $i = (OM)$, la f.é.m. e a pour valeur $(OC) \cos \varphi$.
 A un instant quelconque où $i = (OM) \cos (\omega t + \varphi_i)$, la f.é.m. vaut $(OC) \cos (\omega t + \varphi_e)$.

On peut utiliser cette construction pour déterminer graphiquement :

- l'amplitude du courant I
- le déphasage $\varphi = \varphi_e - \varphi_i$.

En effet :

$$\bullet E = OC = \sqrt{OA^2 + AC^2} = \sqrt{R^2 I^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 I^2}$$

$$\text{soit : } I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\bullet \operatorname{tg} \varphi = \frac{AC}{OA} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

4.3 Méthode des amplitudes complexes

En notations complexes, on associe aux tensions e , u_R , u_L , u_C , les amplitudes complexes correspondantes satisfaisant à la relation :

$$\underline{E} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C$$

$$\text{avec : } \underline{U}_R = RI \quad \underline{U}_L = j\omega LI \quad \underline{U}_C = \frac{-j}{\omega C} I$$

soit :

$$\underline{E} = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I$$

On déduit de cette relation linéaire :

$$\bullet \text{ l'amplitude du courant : } I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

- le déphasage φ entre la tension et le courant : $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$

4.4 Comparaison des méthodes

On constate, à travers l'exemple précédent, que la méthode des amplitudes complexes permet d'accéder très rapidement à la détermination du courant inconnu. Sa supériorité, par rapport aux deux autres méthodes, apparaît de manière encore plus évidente dans l'analyse des réseaux comportant plusieurs mailles : elle permet en effet de linéariser les équations de mailles et de traiter les réseaux RLC formellement comme des réseaux résistifs.

5 Mise en œuvre de la méthode des amplitudes complexes

5.1 Notion d'impédance complexe

Lorsqu'on applique une tension sinusoïdale $u = U \cos(\omega t + \varphi_u)$ aux bornes d'un dipôle passif linéaire, celui-ci est parcouru par un courant de même pulsation ω que la tension :

$$i = I \cos(\omega t + \varphi_i)$$

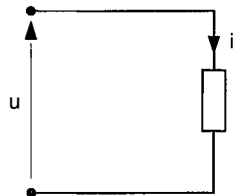
dont la phase φ_i est en général différente de φ_u .

Associés à u et i les amplitudes complexes $\underline{U} = U e^{j\varphi_u}$ et $\underline{I} = I e^{j\varphi_i}$.
Par définition :

- l'impédance complexe du dipôle est la quantité : $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$.
- son admittance complexe est la quantité : $\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}}$.

L'impédance du dipôle est égale au module de son impédance complexe :

$$Z = |\underline{Z}| = \frac{U}{I} \left| e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} \right|$$



soit :

$$|\underline{Z}| = \frac{U}{I}$$

Cette quantité est exprimée en ohms. De même, l'admittance du dipôle exprimée en siemens est le module de \underline{Y} :

$$|\underline{Y}| = \frac{I}{U}$$

Le déphasage $\varphi_u - \varphi_i$ entre tension et courant est l'argument de l'impédance complexe :

$$\varphi_u - \varphi_i = \arg[\underline{Z}]$$

5.2 Expression des impédances complexes

Les impédances et admittances complexes des dipôles R,L,C se déduisent des relations établies au § 3 :

$\underline{Z}_R = R$	$\underline{Y}_R = G$	pour un résistor
$\underline{Z}_L = j\omega L$	$\underline{Y}_L = \frac{-j}{\omega L}$	pour une inductance
$\underline{Z}_C = \frac{-j}{\omega C}$	$\underline{Y}_C = j\omega C$	pour une capacité

Elles satisfont à la loi d'Ohm :

$$\underline{U} = \underline{Z}\underline{I} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{I} = \underline{Y}\underline{U}$$

5.3 Lois de Kirchhoff

En notations complexes, la loi des nœuds $\sum_{\rightarrow} i = 0$ ou $\sum G_{\rightarrow} u = \sum_{\rightarrow} \eta$ s'écrit sous la forme :

$$\sum_{\rightarrow} \underline{I} = 0 \quad \text{ou} \quad \sum \underline{Y} \underline{U} = \sum \underline{H}$$

La première relation découle de l'additivité des amplitudes complexes ; la seconde s'établit à partir de la première et de la loi d'Ohm.

La loi des mailles s'écrit, pour les mêmes raisons, sous la forme :

$$\sum_{\rightarrow M} \underline{U} = 0 \quad \text{ou} \quad \sum \underline{Z} \underline{I} = \sum \underline{E}$$

5.4 Lois d'association et loi d'Ohm

Les lois d'association des impédances complexes découlent des lois de Kirchhoff. Elles sont donc analogues à celles qui ont été établies au chapitre 3 :

- Les impédances complexes en série s'additionnent : $\underline{Z}_{eq} = \sum \underline{Z}$.
- Les admittances complexes en parallèle s'additionnent : $\underline{Y}_{eq} = \sum \underline{Y}$.

Pour un dipôle RLC obtenu par association, la loi d'Ohm se généralise sous la forme :

$$\underline{U} = \underline{Z} \underline{I}, \text{ avec : } \underline{Z}(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega) = Z(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

$$\underline{I} = \underline{Y} \underline{U}, \text{ avec : } \underline{Y}(j\omega) = G(\omega) + jB(\omega) = Y(\omega) e^{-j\varphi(\omega)}$$

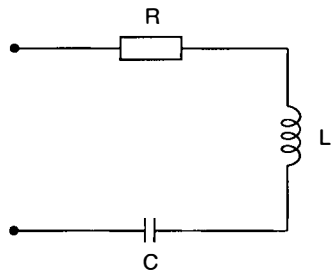
Attention :

$$\text{On a toujours : } Y = \frac{1}{Z}$$

$$\text{mais en général : } G \neq \frac{1}{R} \text{ et : } B \neq \frac{1}{X}$$

Exemples :

a) L'impédance complexe de l'association suivante :



est :

$$\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = R + j\omega L - \frac{j}{\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

On peut la mettre sous la forme :

$$\underline{Z} = Z e^{j\varphi}$$

en utilisant les propriétés des nombres complexes.

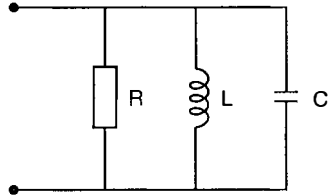
Si :

$$\underline{Z} = a + jb = Z e^{j\varphi}, \quad \text{on a : } \begin{cases} Z^2 = a^2 + b^2 \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} \end{cases}$$

Dans le cas présent :

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad \text{et : } \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

b) L'impédance complexe de l'association suivante :



est :

$$\underline{Z} = \underline{Z}_R // \underline{Z}_L // \underline{Z}_C = Z e^{j\varphi}$$

Il est commode de calculer plutôt son admittance complexe :

$$\underline{Y} = \underline{Y}_R + \underline{Y}_L + \underline{Y}_C = G - \frac{j}{\omega L} + j\omega C = G + j \left[\omega C - \frac{1}{\omega L} \right] = Y e^{-j\varphi}$$

on en déduit :

$$Y = \sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \quad \operatorname{tg}(-\varphi) = \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G}$$

5.5 Analyse des réseaux

Toutes les techniques de résolution développées pour les réseaux résistifs, s'appliquent sans restriction aux réseaux RLC en régime sinusoïdal, à condition d'effectuer les substitutions suivantes :

$u \rightarrow \underline{U}$
$e \rightarrow \underline{E}$
$i \rightarrow \underline{I}$
$\eta \rightarrow \underline{H}$
$R \rightarrow \underline{Z}$
$G \rightarrow \underline{Y}$

En particulier, l'analyse des réseaux peut se faire :

- par la méthode des mailles, suivant le principe exposé au chapitre 4, paragraphe 3. On peut construire directement des systèmes d'équations du type :

$$\underline{Z}_{11} \underline{I}_1 - \underline{Z}_{12} \underline{I}_2 - \dots - \underline{Z}_{1m} \underline{I}_m = \sum_{\rightarrow M1} \underline{E}$$

:

$$- \underline{Z}_{m1} \underline{I}_1 - \underline{Z}_{m2} \underline{I}_2 - \dots + \underline{Z}_{mm} \underline{I}_m = \sum_{\rightarrow Mm} \underline{E}$$

- par la méthode des nœuds qui conduit aux n équations :

$$\underline{Y}_{11} \underline{U}_1 - \underline{Y}_{12} \underline{U}_2 - \dots - \underline{Y}_{1n} \underline{U}_n = \sum_{\rightarrow *1} \underline{H}$$

:

$$- \underline{Y}_{n1} \underline{U}_1 - \underline{Y}_{n2} \underline{U}_2 - \dots + \underline{Y}_{nn} \underline{U}_n = \sum_{\rightarrow *n} \underline{H}$$

- Les théorèmes de Thévenin et de Norton s'appliquent intégralement aux réseaux RLC étudiés en représentation complexe. La résistance interne de ces générateurs est remplacée par l'impédance complexe \underline{Z}_T . La d.d.p à vide u_0 et le courant de court-circuit i_{cc} sont représentés par leurs amplitudes complexes \underline{U}_0 et \underline{I}_{cc} . L'équivalence Thévenin-Norton se traduit alors par la relation :

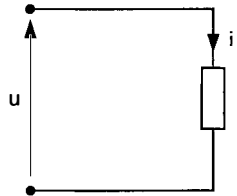
$$\underline{Z}_T = \frac{\underline{U}_0}{\underline{I}_{cc}}$$

6 Puissance en régime sinusoïdal

6.1 Puissances instantanée et moyenne

La puissance reçue par un dipôle est égale au produit :

$$p = u i$$



lorsque les flèches associées à u et à i sont de sens opposés. Explicitons cette relation pour :

$$u = U \cos(\omega t + \varphi_u)$$

$$i = I \cos(\omega t + \varphi_i)$$

on a :

$$\begin{aligned} p &= UI \cos(\omega t + \varphi_u) \cdot \cos(\omega t + \varphi_i) \\ &= \frac{UI}{2} [\cos(\varphi_u - \varphi_i) + \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)] \\ &= \frac{UI}{2} [\cos \varphi + \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)] \end{aligned}$$

en posant : $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$

La puissance instantanée comporte deux termes :

- le premier est indépendant de t ,
- le second varie sinusoïdalement à une fréquence double de celle du signal.

6.2 Puissances active et apparente

La puissance active reçue par un dipôle est égale, par définition, à la puissance moyenne qu'il reçoit pendant une période :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

Nous avons vu au paragraphe 1.2. que l'intégration d'un terme sinusoïdal sur une période conduit à une valeur nulle. Il reste donc :

$$P = \frac{UI}{2T} \int_0^T \cos \varphi dt = \frac{UI}{2} \cos \varphi = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi$$

- La puissance active reçue par un dipôle, exprimée en watts, est :

$$P = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi$$

- Le produit $S = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$ exprimé en volt-ampères (V.A) représente la puissance apparente.
- Le terme $\cos \varphi$, qui traduit le déphasage tension-courant $\varphi_u - \varphi_i$, est appelé facteur de puissance.

Dans un dipôle d'impédance complexe $\underline{Z} = R + j X$ ou d'admittance complexe $\underline{Y} = G + j B$, la puissance active absorbée vaut :

$$P = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi \quad \text{avec : } \begin{cases} U_{\text{eff}} = Z I_{\text{eff}} & ; & I_{\text{eff}} = Y U_{\text{eff}} \\ \cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{G}{Y} \end{cases}$$

soit :

$$\begin{aligned} P &= Z I_{\text{eff}}^2 \cdot \frac{R}{Z} = R I_{\text{eff}}^2 \\ &= Y U_{\text{eff}}^2 \cdot \frac{G}{Y} = G U_{\text{eff}}^2 \end{aligned}$$

Exemples :

- dans une résistance : $P = R I_{\text{eff}}^2 = G U_{\text{eff}}^2$
- dans un condensateur ou une bobine parfaite $P = 0$.

6.3 Puissance réactive

On définit la puissance réactive reçue par le dipôle comme la quantité :

$$Q = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin \varphi = \frac{UI}{2} \sin \varphi$$

exprimée en VAR (volts-ampères-réactifs).

Dans un dipôle d'impédance complexe $\underline{Z} = R + jX$ ou d'admittance complexe $\underline{Y} = G + jB$, un calcul analogue au précédent montre que :

$$Q = X I_{\text{eff}}^2 = -B U_{\text{eff}}^2$$

Au total, la puissance apparente reçue par un dipôle passif de nature quelconque a pour valeur :

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Le facteur de puissance est le quotient :

$$\cos \varphi = \frac{P}{S}$$

7 Influence de la fréquence

7.1 Fonctions de transfert

7.1.1. DÉFINITION

Lorsqu'on étudie un schéma équivalent dynamique de circuit électronique, on cherche à déterminer en général la réponse de ce circuit à une excitation sinusoïdale. Cette réponse se traduit par l'apparition d'un signal de sortie s : tension aux bornes d'un dipôle particulier représentant la charge du circuit, ou intensité du courant le traversant. L'excitation e à l'entrée du réseau consiste en une tension ou un courant éventuellement variable en amplitude, en fréquence ou en phase.

$$e \rightarrow \text{réseau} \rightarrow s$$

Par définition, la fonction de transfert du circuit est le rapport complexe :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{S}}{\underline{E}}$$

7.1.2. DIAGRAMME DE BODE

Le module et l'argument de la fonction de transfert d'un circuit linéaire dépendent en général de la pulsation ω . Lorsque s et e sont de même nature, il est d'usage de représenter graphiquement en fonction de $\log \omega$:

- $H_{\text{db}} = 20 \log |\underline{H}|$ (quantité exprimée en décibels),
- $\text{Arg} [\underline{H}]$

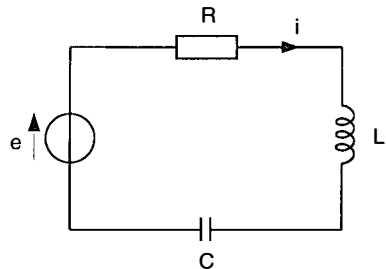
Ces représentations portent le nom de diagrammes de Bode.

7.1.3. DIAGRAMME DE NYQUIST

Le diagramme de Nyquist est une représentation de la fonction de transfert dans le plan complexe : à la quantité $\underline{H}(j\omega)$ on associe le point M à la distance $|\underline{H}|$ de l'origine, faisant l'angle $\text{Arg} [\underline{H}]$ avec l'axe des réels.

7.2 Résonance

Considérons le circuit RLC ci-contre.



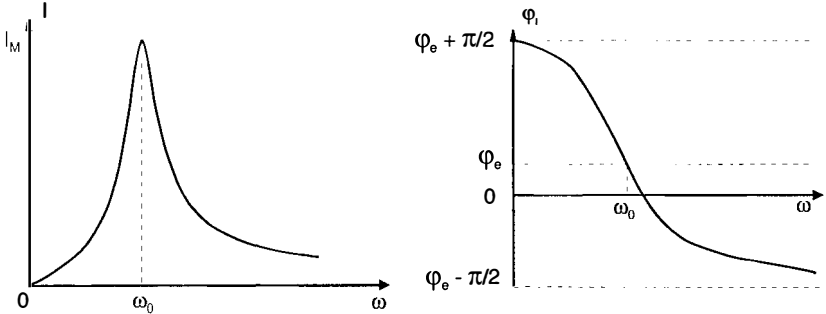
On suppose que la source de tension de f.é.m. $e = E \cos(\omega t + \varphi_e)$ a une amplitude E et une phase φ_e constantes, mais que sa pulsation ω peut varier. Le courant $i = I \cos(\omega t + \varphi_i)$ que débite cette source a été calculé au § 4 :

- son amplitude est :
$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

- sa phase est :

$$\varphi_i = \varphi_e - \text{Arc tg} \left[\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right]$$

Lorsque ω varie de 0 à l'infini, I et φ_i varient conformément aux courbes ci-dessous :



La pulsation ω_0 pour laquelle on a, à la fois, une amplitude du courant maximale et des phases φ_i et φ_e égales, est appelée fréquence de résonance. Elle satisfait à la relation :

$$\frac{1}{\omega_0 C} = \omega_0 L \quad \text{soit :} \quad LC\omega_0^2 = 1$$

L'amplitude maximale du courant vaut alors :

$$I_M = \frac{E}{R}$$

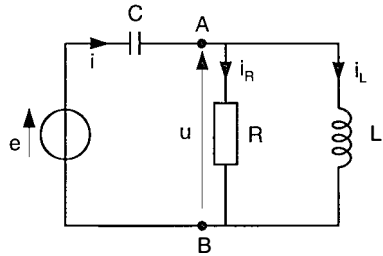
Lorsqu'on s'éloigne de la pulsation de résonance, l'amplitude du courant diminue : un tel circuit est appelé passe-bande. On définit les limites ω_1 et ω_2 de sa bande passante comme les pulsations pour lesquelles l'amplitude est égale à $I_M / \sqrt{2}$ (voir exercice 5.27).

Énoncés des exercices

Méthode de Fresnel

EXERCICE 5.1 :

Déterminez par la méthode de Fresnel l'amplitude I et la phase φ_i du courant $i = I \cos(\omega t + \varphi_i)$ que débite la source de f.é.m. $e = E \cos \omega t$. On donne : $R = 1,2 \text{ k}\Omega$; $\omega = 10^4 \text{ rad/s}$; $L = 0,1 \text{ H}$; $C = 0,125 \mu\text{F}$; $E = 10 \text{ V}$.



EXERCICE 5.2 :

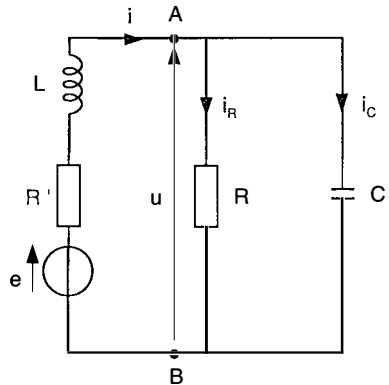
Reprenez l'exercice 5.1 en permutant le condensateur et la bobine.

EXERCICE 5.3 :

Reprenez l'exercice 5.1 en permutant le condensateur et la résistance.

EXERCICE 5.4 :

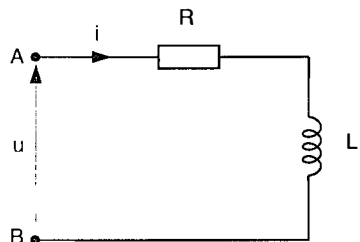
On considère le réseau ci-contre alimenté par une source de tension de f.é.m. $e = E \cos \omega t$. Déterminez successivement le courant i et la tension u par des constructions de Fresnel. On donne : $E = 10 \text{ V}$; $R = 2 \Omega$; $\omega C = 0,6 \Omega^{-1}$; $R' = 0,8 \Omega$; $\omega L = 0,82 \Omega$.



Calculs d'impédances complexes

EXERCICE 5.5 :

On applique une tension $u = U \cos \omega t$ aux bornes d'une bobine de résistance interne $R = 20 \Omega$ et d'inductance $L = 0,1 \text{ H}$. Donnez l'expression de l'intensité i du courant qui la traverse

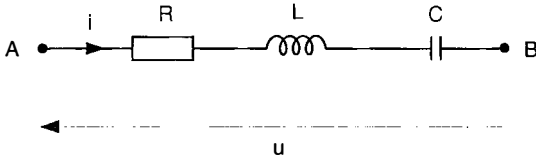


à l'instant t , sachant que la tension efficace est de 220 V, et la fréquence de 50 Hz.

EXERCICE 5.6 :

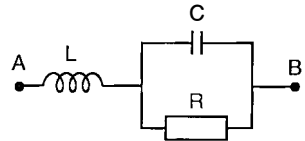
On applique une tension $u = U \cos \omega t$ entre les bornes A et B du dipôle représenté ci-dessous.

- Quelle est l'impédance complexe \underline{Z} de ce dipôle ? Pour quelle valeur ω_0 de ω , ce dipôle est-il équivalent à un résistor ?
- Déterminez C en fonction de L et de R sachant que u est en avance de $\pi/4$ sur le courant i lorsque $\omega = 2R/L$. Donnez dans ce cas l'expression de i à l'instant t .
- Retrouvez les résultats précédents par la méthode de Fresnel.



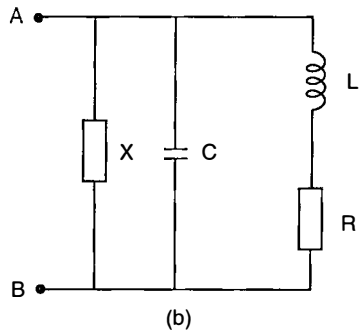
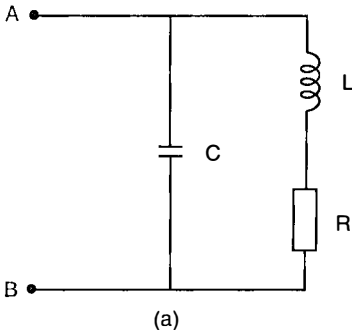
EXERCICE 5.7 :

Déterminez en fonction de R , C , et ω la valeur de L pour laquelle ce dipôle est équivalent à un résistor.



EXERCICE 5.8 :

- Exprimez l'admittance complexe \underline{Y} du dipôle représenté en (a) sous la forme $\underline{Y} = G + jB$.

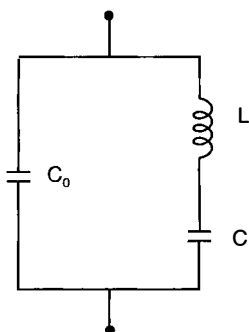


- b) Déduisez de cette expression le module Z et l'argument φ de son impédance complexe pour $\omega = 10^4$ rad/s ; $L = 1$ mH ; $R = 10 \Omega$; $C = 50 \mu\text{F}$.
- c) Déterminez les caractéristiques du dipôle X qu'il faut placer entre A et B pour que le dipôle résultant soit purement résistif (figure b).

EXERCICE 5.9 :

Etude sommaire d'un quartz :

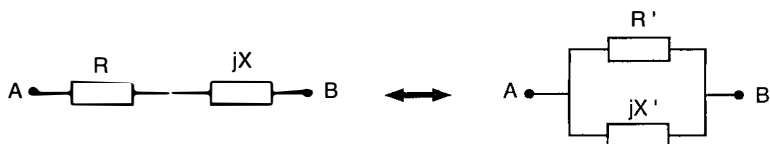
Un résonateur à quartz piézoélectrique peut idéalement être représenté comme suit, lorsqu'on considère les pertes comme négligeables. On donne $L = 10$ H ; $C = 0,1$ pF ; $C_0 = 10$ pF.



- a) Calculez l'admittance complexe \underline{Y} de ce dipôle. Pour quelle(s) valeur(s) de la pulsation ω , \underline{Y} devient-elle nulle ou infinie en module ?
- b) Représentez graphiquement les variations du module et de l'argument de \underline{Z} en fonction de ω , entre 0 et l'infini.

EXERCICE 5.10 :

- a) On considère les représentations équivalentes série et parallèle d'un même dipôle.



Exprimez R et X en fonction de R' et X' , et vice-versa.

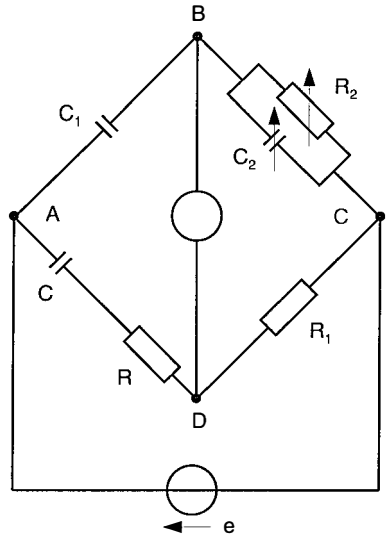
- b) On définit le coefficient de qualité du dipôle comme le rapport $Q = X/R$. Exprimez Q en fonction de X' et R' .

- c) La représentation série précédente est celle d'une bobine de résistance interne R , d'inductance L . Déterminez les caractéristiques de la représentation parallèle équivalente de cette bobine pour Q grand.
- d) La représentation parallèle précédente est celle d'un condensateur réel de capacité C' qui présente une résistance de fuite R' . Déterminez les caractéristiques de la représentation série équivalente pour Q grand.

Ponts de mesures

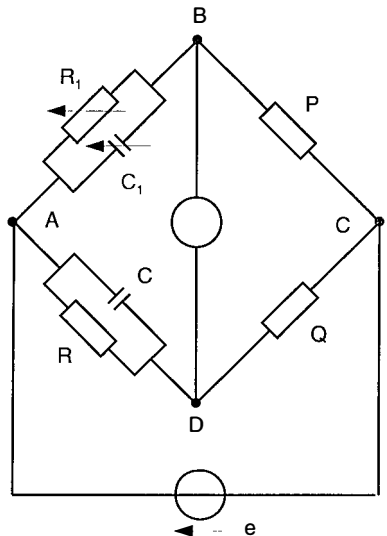
EXERCICE 5.11 :

Le pont de Schering est utilisé pour mesurer la capacité C et la résistance série R d'un condensateur. On ajuste R_2 et C_2 pour équilibrer le pont ($u_B = u_D$). Montrer que les valeurs de R et C s'expriment alors en fonction de R_1 , R_2 , C_1 , C_2 .



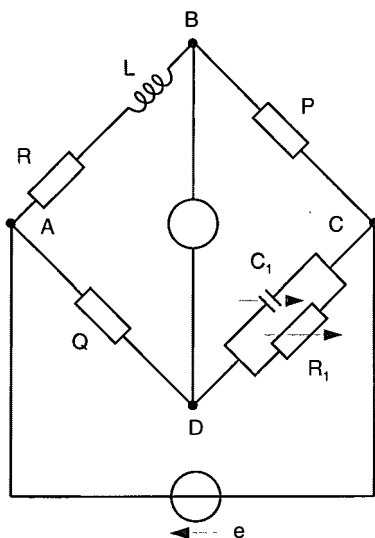
EXERCICE 5.12 :

Le pont de Sauty est utilisé pour mesurer la capacité C et la résistance de fuite R d'un condensateur. On ajuste R_1 et C_1 pour équilibrer le pont. Montrer que les valeurs de R et C s'expriment alors en fonction de P , Q , R_1 , C_1 .



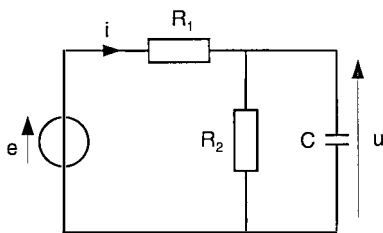
EXERCICE 5.13 :

Le pont de Maxwell est utilisé pour mesurer l'inductance L et la résistance R d'une bobine. On ajuste R_1 et C_1 pour équilibrer le pont ($u_B = u_D$). Montrer que les valeurs de R et L s'expriment alors en fonction de P , Q , R_1 , C_1 .

**Circuits électriques****EXERCICE 5.14 :**

Le circuit ci-contre est alimenté par une source de tension de f.é.m. $e = 2\sqrt{5} \cos \omega t$.

- a) Calculez numériquement l'amplitude complexe du courant que débite cette source, son module et son argument. On donne $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$; $R_2 = 2 \text{ k}\Omega$; $C = 0,5 \text{ }\mu\text{F}$; $\omega = 1 \text{ krad/s}$.
- b) Calculez numériquement la tension u aux bornes du condensateur.

**EXERCICE 5.15 :**

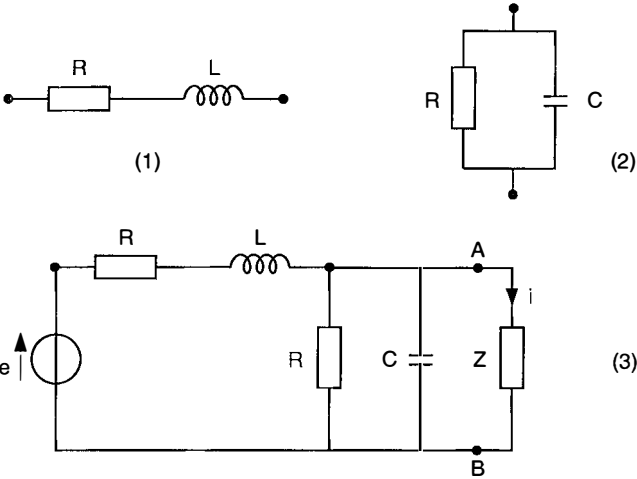
Traitez les exercices 5.1, 5.2, et 5.3 par la méthode des amplitudes complexes.

EXERCICE 5.16 :

Traitez l'exercice 5.4 par la méthode des amplitudes complexes.

EXERCICE 5.17 :

a) La figure 1 représente un dipôle (R, L) série. Exprimez son impédance complexe Z_S à la pulsation ω .



b) La figure 2 représente un dipôle (R, C) parallèle. Exprimez son admittance complexe Y_P à la pulsation ω .

c) La figure 3 représente un pont diviseur constitué par les 2 dipôles précédents, soumis à une f.é.m. sinusoïdale e , et chargé entre les bornes A et B par une impédance Z . Exprimer en fonction de E , Z_S , et Y_P :

1 - l'amplitude complexe de la d.d.p. à vide \underline{U}_0 ,

2 - l'amplitude complexe du courant de court-circuit \underline{I}_{cc} .

d) Calculez numériquement \underline{U}_0 et \underline{I}_{cc} sachant que $e = 10 \cos \omega t$ (en volts) ; $\omega = 2 \text{ krad}\cdot\text{s}^{-1}$; $R = 1 \text{ k}\Omega$; $L = 1 \text{ H}$; $C = 1 \mu\text{F}$.

e) Déduisez de la question précédente l'impédance complexe Z_T du générateur de Thévenin équivalent au montage, vu par la charge Z entre les bornes A et B.

f) Vérifiez par un calcul direct la valeur de Z_T trouvée à la question précédente.

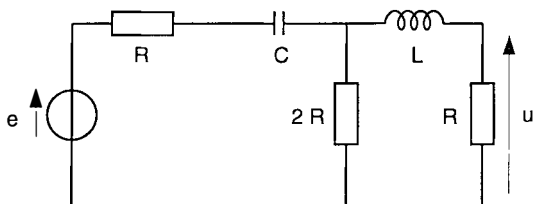
g) En utilisant le générateur de Norton équivalent, calculez l'amplitude complexe \underline{I} du courant qui circule dans Z lorsque $Z = 0,2 - j0,6$ (en $\text{k}\Omega$).

h) Déduisez-en l'amplitude I et la phase φ du courant réel $i = I \cos(\omega t + \varphi)$.

EXERCICE 5.18 :

Le circuit représenté ci-dessous est alimenté par une source de tension de f.é.m. $e = E \cos \omega t$ dont la pulsation ω est telle que $\omega L = 1/\omega C = R$. Déterminez la tension u :

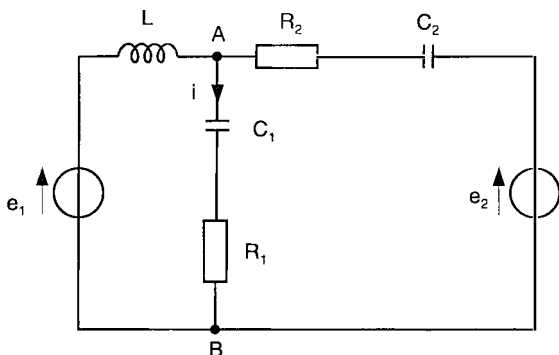
- par la méthode des mailles,
- par application du théorème de Thévenin.

**EXERCICE 5.19 :**

Le circuit représenté ci-dessous est alimenté par deux sources de tension de f.é.m. :

$$e_1 = E_1 \cos \omega t$$

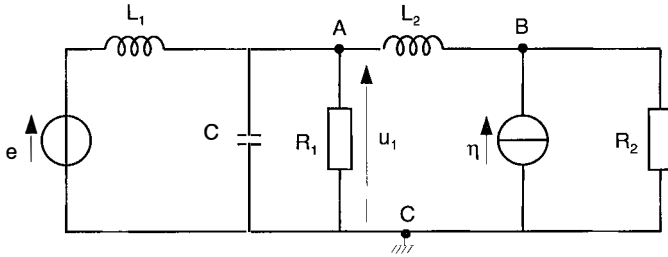
$$e_2 = E_2 \cos (\omega t + \pi/4)$$



- Formez les équations de mailles permettant le calcul de l'amplitude complexe \underline{I} du courant i .
- Explicitiez le système obtenu pour $\omega = 10 \text{ krad/s}$; $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$; $R_2 = 2 \text{ k}\Omega$; $L = 0,2 \text{ H}$; $C_1 = C_2 = 100 \text{ nF}$; $E_1 = 2 \text{ V}$; $E_2 = 1,414 \text{ V}$.
- Déterminez numériquement i .

EXERCICE 5.20 :

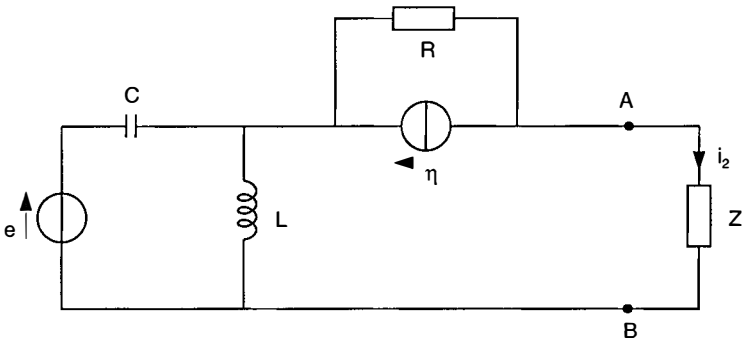
Le circuit représenté ci-dessous comprend une source de tension de f.é.m. $e = 2 \cos \omega t$ exprimée en volts, et une source de courant de débit $\eta = 1 \cos(\omega t + \pi/2)$ exprimé en mA.



- Établissez le système d'équations de nœuds permettant le calcul de l'amplitude complexe \underline{U}_1 associée à u_1 .
- Explicitez ce système pour $\omega = 1$ krad/s ; $C = 3 \mu\text{F}$; $L_1 = 0,5$ H ; $L_2 = 1$ H ; $R_1 = 1$ k Ω ; $R_2 = 0,5$ k Ω .
- Déterminez numériquement u_1 .

EXERCICE 5.21 :

Le circuit ci-dessous est alimenté par une source de tension de f.é.m. $e = E \cos \omega t$, et une source de courant de débit $\eta = H \cos(\omega t - \pi/2)$. La pulsation ω est telle que $\omega L = 3R$ et $1/\omega C = 2R$.



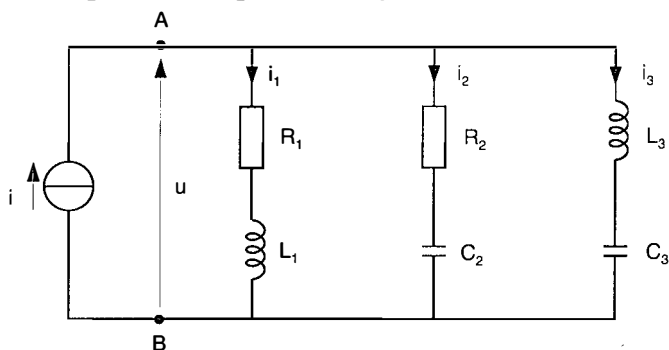
- En utilisant la méthode des mailles, déterminez l'expression numérique complète du courant i_2 qui circule dans l'impédance $\underline{Z} = R(1 + j)$ pour $E = 5$ V, $R = 1$ k Ω , et $H = 10$ mA.

b) Traitez cet exercice en déterminant tout d'abord les éléments \underline{E}_T et \underline{Z}_T du générateur de Thévenin équivalent, vu par la charge \underline{Z} entre les bornes A et B.

Puissance

EXERCICE 5.22 :

a) Calculez numériquement les admittances complexes des 3 dipôles disposés en parallèle entre les bornes A et B pour $\omega = 1000$ rad/s ; $L_1 = L_3 = 0,1$ H ; $R_1 = 100 \Omega$; $R_2 = 200 \Omega$; $C_2 = 10 \mu\text{F}$; $C_3 = 5 \mu\text{F}$.



b) Le débit de la source de courant, exprimé en ampères, est $i = 2 \cos \omega t$. Déterminez numériquement i_1 , i_2 , i_3 .

c) Calculez numériquement la tension u , la puissance active P fournie par la source, celles P_1 , P_2 , P_3 reçues par les 3 dipôles précédents.

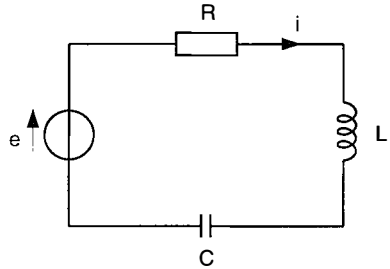
EXERCICE 5.23 :

Un générateur de tension de f.é.m. $e = E \cos \omega t$, d'impédance interne $\underline{Z} = R + jX$, est relié à une charge d'impédance complexe $\underline{Z}' = R' + jX'$. Pour quelles valeurs de R' et X' la puissance active délivrée par le générateur est-elle maximale ?

EXERCICE 5.24 :

a) Calculez successivement les puissances active, réactive, et apparente mises en jeu dans le circuit ci-dessous. On donne : $R = 5 \Omega$; $L = 0,5$ mH ; $C = 50 \mu\text{F}$; $\omega = 10$ krad/s ; $E = 8,48$ V.

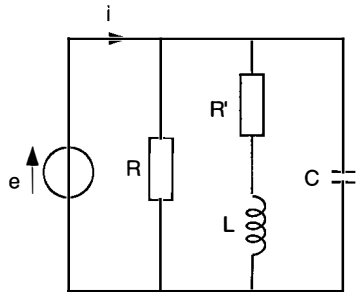
b) Calculez le facteur de puissance



EXERCICE 5.25 :

a) Calculez successivement les puissances active, réactive, et apparente mises en jeu dans le circuit ci-contre. On donne : $R = 50 \Omega$; $L = 3 \text{ mH}$; $R' = 5 \Omega$; $C = 1 \mu\text{F}$; $\omega = 10 \text{ krad/s}$; $E = 10 \text{ V}$.

b) Calculez le facteur de puissance et l'intensité efficace du courant que débite la source de tension.



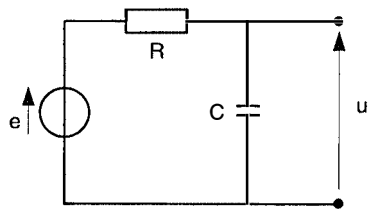
Fonctions de transfert - Filtres

EXERCICE 5.26 :

Filtre du premier ordre : cellule RC passe - bas.

a) Calculez la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \underline{U}/\underline{E}$, et montrez qu'on peut l'écrire sous la forme réduite :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$$



b) Que représente la valeur particulière ω_c de la pulsation ?

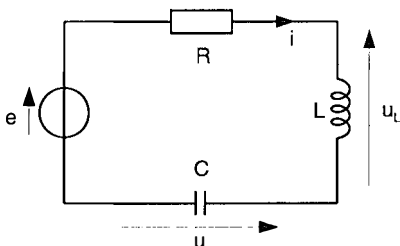
c) Représentez la courbe de réponse sous la forme d'un diagramme de Bode (amplitude et phase).

EXERCICE 5.27 :

Résonance :

Le circuit RLC représenté ci-contre comporte :

- une f.é.m. d'excitation $e = E \cos \omega t$ [$E = 1 \text{ V}$; $1 < \omega < 100 \text{ krad/s}$]
- une bobine d'inductance $L = 0,1 \text{ H}$
- un condensateur de capacité $C = 0,1 \mu\text{F}$
- une résistance $R = 250 \Omega$



La résistance interne du générateur et la résistance de la bobine sont incluses dans R . On pose $u = U \cos(\omega t + \theta)$, $i = I \cos(\omega t + \varphi)$.

a) Déterminez la réponse en courant complexe :

$$\underline{I} = \underline{E} / \underline{Z}(j\omega) = \underline{Y}(j\omega) \cdot \underline{E}$$

b) Déduisez-en la valeur ω_0 de la pulsation de résonance pour laquelle i et e sont en phase ($\varphi = 0$), ainsi que l'amplitude maximale I_0 du courant.

c) Montrez que la réponse en courant peut s'écrire sous la forme réduite :

$$\frac{\underline{I}}{I_0} = \frac{1}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)}$$

en posant $x = \omega/\omega_0$. Calculez le coefficient de qualité Q .

d) Pour x variant de 0,1 à 10, représentez graphiquement le diagramme de Bode pour cette fonction réduite $\underline{H}(jx) = A(x) \cdot e^{j\varphi(x)}$, c'est à dire :

- la courbe d'amplitude $A(x) = I/I_0$ que vous exprimerez en dB.
- la courbe de phase $\varphi(x)$ que vous exprimerez en degrés.

e) Déterminez la bande passante $\Delta \omega$ à -3 dB , ainsi que les pulsations de coupure ω_1 et ω_2 .

f) Représentez dans le plan complexe le lieu de Nyquist pour l'impédance \underline{Z} du circuit. Déduisez-en le lieu de Nyquist pour l'admittance \underline{Y} et la réponse \underline{I} .

g) Etudiez la tension aux bornes du condensateur sous la forme :

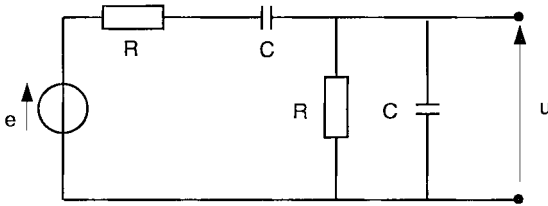
$\underline{U}/\underline{E} = \underline{H}'(jx) = A'(x) \cdot e^{j\theta(x)}$. Représentez le diagramme de Bode pour $A'(x)$ et $\theta(x)$.

EXERCICE 5.28 :

Filtre de Wien :

Le schéma ci-dessous représente un filtre de Wien attaqué par une f.é.m. sinu-

soïdale $e = E \cos \omega t$ dont la pulsation peut varier de 0 à 100 krad/s.



a) Exprimez la fonction de transfert sous la forme :

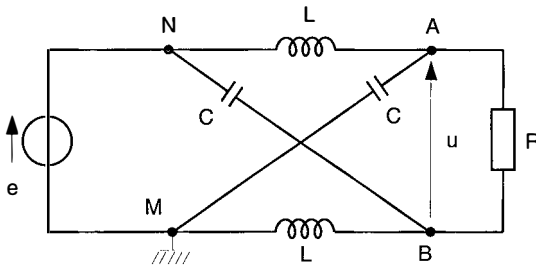
$$\underline{H}(j\omega) = \underline{U}/\underline{E} = \frac{A_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

b) Calculez numériquement A_0 , Q et ω_0 pour $R = 1 \text{ k}\Omega$ et $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$.

c) Donnez l'allure des courbes de réponse en amplitude et en phase.

EXERCICE 5.29 :

Le réseau en treillis ci-dessous, attaqué par la f.é.m. $e = E \cos \omega t$, délivre aux bornes de R une tension $u = U \cos (\omega t + \varphi)$.



a) Déterminez les éléments \underline{E}_T et \underline{Z}_T du générateur de Thévenin vu par la charge R entre les bornes A et B .

b) Examinez le cas où la source d'excitation fonctionne à la pulsation $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

c) Calculez la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \underline{U}/\underline{E}$. Montrez qu'on peut la réduire sous la forme :

$$\underline{H}(jx) = \frac{1 + x^2}{1 - x^2 + jx/Q}$$

en posant $x = \omega/\omega_0$. Explicitez le coefficient Q en fonction de R , L et C .

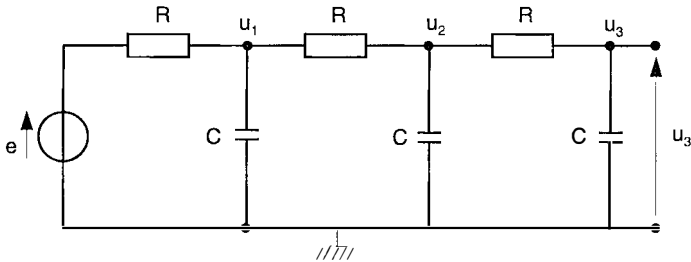
Application numérique : $R = 4 \text{ k}\Omega$; $L = 0,1 \text{ H}$; $C = 0,1 \text{ }\mu\text{F}$.

d) On pose $\underline{H}(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$. Donnez l'allure des courbes de réponse $A(\omega)$ et $\varphi(\omega)$.

EXERCICE 5.30 :

Réseau déphaseur en échelle (passe - bas du troisième ordre) :

Le réseau déphaseur représenté ci-dessous comporte trois cellules RC identiques disposées en cascade.

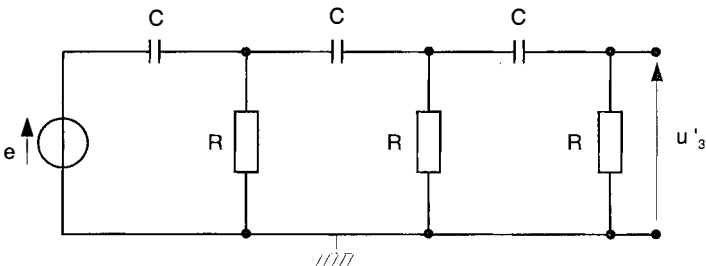


- Calculez la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \underline{U}_3 / \underline{E}$ en utilisant la méthode des nœuds.
- Déduisez-en la valeur ω_0 de la pulsation pour laquelle la tension de sortie u_3 est en opposition de phase avec la tension d'entrée e .
- Déterminez l'atténuation du filtre à la pulsation ω_0 .

EXERCICE 5.31 :

Réseau déphaseur en échelle (passe - haut du troisième ordre) :

Répondez aux questions de l'exercice précédent pour le réseau représenté ci-dessous :



Résolution des systèmes d'équations linéaires

L'analyse d'un réseau électrique nécessite la résolution de systèmes d'équations linéaires du type :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

dans lesquels les inconnues x_1, \dots, x_n sont des intensités i_1, \dots, i_n ou des tensions u_1, \dots, u_n .

Ces systèmes peuvent être résolus par la méthode de Cramer, dont nous donnons ici le principe sans démonstration.

1 Calcul d'un déterminant

1.1 Définitions

On appelle déterminant d'ordre n un tableau à n lignes et n colonnes du type :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Les coefficients a_{ij} sont repérés par deux indices :

- le premier, i , représente le numéro de la ligne dans laquelle ils se situent.
- le deuxième, j , représente le numéro de la colonne.

Dans l'exemple ci-dessous :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

les coefficients a_{11} et a_{22} sont respectivement égaux à 1 et -1.

On appelle mineur $\Delta(a_{ij})$ du coefficient a_{ij} d'un déterminant Δ d'ordre n , le déterminant d'ordre $n - 1$ obtenu en supprimant dans Δ la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne.

$$\text{Dans l'exemple précédent : } \Delta(a_{11}) = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta(a_{22}) = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$

1.2 Propriétés

Tout déterminant d'ordre n peut se développer suivant une ligne particulière i ou une colonne j en une somme de n déterminants d'ordre $n - 1$:

$$\Delta = \sum_{\substack{j \text{ fixé} \\ i=1 \text{ à } n}} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta(a_{ij})$$

$$\Delta = \sum_{\substack{i \text{ fixé} \\ j=1 \text{ à } n}} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta(a_{ij})$$

Dans ces développements, les coefficients $(-1)^{i+j}$ sont égaux à 1 lorsque $i + j$ est pair, et à -1 lorsque $i + j$ est impair.

Ils représentent donc les signes dont il faut affecter les coefficients a_{ij} , ceux-ci variant alternativement conformément au tableau ci-dessous :

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Exemple 1:

Développons le déterminant d'ordre 2 :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

a) Suivant la première ligne :

$$\Delta = a_{11} \Delta(a_{11}) - a_{12} \Delta(a_{12}) = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

b) Suivant la deuxième colonne :

$$\Delta = -a_{12} \Delta(a_{12}) + a_{22} \Delta(a_{22}) = -a_{12} a_{21} + a_{22} a_{11}$$

On vérifie aisément que les développements de Δ suivant la deuxième ligne

et la première colonne conduisent au même résultat. Celui-ci doit être retenu :

Un déterminant d'ordre 2 est égal au produit des coefficients de sa diagonale principale diminué de celui de ses deux autres coefficients.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

Exemple 2 :

Développons le déterminant d'ordre 3 :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

a) Suivant la première ligne :

$$\begin{aligned} \Delta &= +(1).\Delta(a_{11}) - (2).\Delta(a_{12}) + (-3).\Delta(a_{13}) \\ &= 1 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1.(-11) - 2.(-20) - 3.(5) = -11 + 40 - 15 = 14 \end{aligned}$$

b) Suivant la deuxième ligne :

$$\begin{aligned} \Delta &= - (0).\Delta(a_{21}) + (-1).\Delta(a_{22}) - (4).\Delta(a_{23}) \\ &= 0 - 1 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 0 - 1.(18) - 4(-8) \\ &= -18 + 32 = 14 \end{aligned}$$

On remarque ici que le deuxième développement est plus rapide que le premier, parce que le coefficient a_{21} est nul. Il en serait de même pour un développement suivant la première colonne. On peut en déduire une règle pratique :

On développe un déterminant suivant la ligne ou la colonne dans laquelle le nombre de zéros est plus grand.

2 Méthode de Cramer

2.1 Définition

Le déterminant d'un système de n équations linéaires à n inconnues est le déterminant formé des coefficients ordonnés de ces inconnues. Par exemple, le déterminant du système :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

est :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2.2 Principe

Lorsque le déterminant Δ d'un système d'équations est non nul, chaque inconnue est égale au quotient par Δ du déterminant obtenu en remplaçant dans Δ la colonne relative à l'inconnue par les coefficients au second membre.

Dans l'exemple précédent :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

la colonne $\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{matrix}$ est remplacée par $\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix}$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

la colonne $\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{matrix}$ est remplacée par $\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix}$

$$x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{array} \quad \begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array}$$

la colonne a_{23} est remplacée par

2.3 Exemples

Exemple 1 :

Considérons le système des deux équations à deux inconnues :

$$G_1 u_1 - (G_1 + G_2) u_2 = \eta$$

$$-(G_1 + G_2) u_1 + G_2 u_2 = 0$$

- le déterminant du système a pour expression :

$$\Delta = \begin{vmatrix} G_1 & -(G_1 + G_2) \\ -(G_1 + G_2) & G_2 \end{vmatrix}$$

$$= G_1 G_2 - (G_1 + G_2)^2 = -G_1^2 - G_2^2 - G_1 G_2$$

- les tensions u_1 et u_2 ont pour expression :

$$u_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \eta & -(G_1 + G_2) \\ 0 & G_2 \end{vmatrix} = \frac{-\eta G_2}{G_1^2 + G_2^2 + G_1 G_2}$$

$$u_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} G_1 & \eta \\ -(G_1 + G_2) & 0 \end{vmatrix} = \frac{-\eta(G_1 + G_2)}{G_1^2 + G_2^2 + G_1 G_2}$$

Exemple 2 :

Dans le système d'équations ci-dessous, les coefficients aux seconds membres représentent des tensions exprimées en volts. Les coefficients des courants i_1 , i_2 , et i sont des résistances exprimées en $k\Omega$:

$$-7 i_1 - i_2 = 10$$

$$i_1 + 6 i_2 - 3 i = 0$$

$$-3 i_2 + 13 i = -20$$

- le déterminant de ce système de trois équations à trois inconnues i_1 , i_2 , et i est :

$$\Delta = \begin{vmatrix} -7 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 13 \end{vmatrix}$$

On peut le développer suivant la première colonne :

$$\begin{aligned} \Delta &= -7 \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 13 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 13 \end{vmatrix} \\ &= -7[78 - 9] - 1[-13] \\ &= -483 + 13 = -470 \end{aligned}$$

- Pour calculer i , on remplace dans Δ les coefficients de la troisième colonne par les seconds membres :

$$i = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} -7 & -1 & 10 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & -20 \end{vmatrix}$$

Développons suivant la première colonne :

$$\begin{aligned} i &= \frac{1}{\Delta} \left[-7 \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ -3 & -20 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & 10 \\ -3 & -20 \end{vmatrix} \right] \\ &= -\frac{1}{470} [-7 \cdot (-120) - 1 \cdot (20 + 30)] \\ &= \frac{-(840 - 50)}{470} = -\frac{790}{470} \end{aligned}$$

Dans le système d'équations, les résistances sont données en $k\Omega$, et les tensions en volts. Les valeurs numériques des courants sont donc exprimées en mA :

$$i = -\frac{790}{470} = -1,68 \text{ mA}$$

Corrigés des exercices

Exercices sur le chapitre 2

EXERCICE 2.1 :

La flèche associée à u est dirigée vers le point A ; u représente donc le potentiel de A diminué de celui de B, soit :

$$u = u_A - u_B, \text{ et : } u_A = u + u_B = 3 \text{ V.}$$

EXERCICE 2.2 :

La tension u est égale à la différence (cf exercice 2.1) :

$$u = u_A - u_B$$

que l'on peut décomposer en :

$$u = (u_A - u_D) + (u_D - u_C) + (u_C - u_B)$$

soit :

$$u = u_1 - u_2 + u_3 = 1 - 2 - 3 = -4 \text{ V.}$$

EXERCICE 2.3 :

Les flèches associées à u et à i sont de sens opposés : le produit $p = u i = -3 \text{ mW}$ représente donc la puissance reçue par le dipôle. Cette quantité étant négative à l'instant t , le dipôle se comporte, à cet instant comme un générateur.

EXERCICE 2.4 :

Les flèches associées à u et à i sont de mêmes sens : la puissance reçue par le dipôle est donc $p = -u i = 8 \text{ mW}$. p étant positif, le dipôle se comporte comme un récepteur à l'instant t .

EXERCICE 2.5 :

La loi d'Ohm ne s'écrit sous la forme $u = Ri$ qu'à la condition que les flèches associées à u et à i soient de sens opposés (i entrant par la pointe de u). La résistance R étant toujours positive, u et i sont de même signe : dans le cas présent, i est donc positif.

La puissance absorbée par l'élément résistif a pour valeur :

$$p = u i = R i^2 = G u^2$$

Elle est toujours positive, indépendamment des signes de u ou de i qui interviennent par leurs carrés.

EXERCICE 2.6 :

La tension u est égale à la f.é.m. de la source :

$$u = u_A - u_B = e = 4 \cos \omega t.$$

Le potentiel de la borne A est donc : $u_A = 4 \cos \omega t + u_B$

La période T est reliée à la pulsation ω par la relation $T = \frac{2\pi}{\omega}$. A l'instant $t = T/4$:

$$u_A = 4 \cos \frac{\omega T}{4} + u_B = 4 \cos \frac{\pi}{2} + u_B = 3 \text{ V}$$

EXERCICE 2.7 :

a) Les flèches associées à u et à i étant de sens opposés, la puissance reçue par le condensateur est :

$$p = u i, \text{ avec : } u = 2 \cos \omega t$$

$$\text{et : } i = C \frac{du}{dt} = -2\omega C \sin \omega t$$

$$\text{soit : } p = -4 \omega C \sin \omega t \cos \omega t = -2 \omega C \sin 2\omega t$$

b) A l'instant $t_1 = 0$: $p_1 = 0$.

A l'instant $t_2 = \pi/8\omega$: $p_2 = -2 \omega C \sin \pi/4 = -\sqrt{2} \omega C < 0$; le condensateur se comporte comme un générateur.

A l'instant $t_3 = 5\pi/8\omega$: $p_3 = -2 \omega C \sin 5\pi/4 = \sqrt{2} \omega C > 0$; le condensateur se comporte comme un récepteur.

EXERCICE 2.8 :

a) Deux sources de tension en parallèle :

Ce branchement n'est envisageable que si les deux sources sont identiques. Leur f.é.m. commune étant notée e , la résistance reçoit alors une puissance $p = e^2/R$, fournie pour moitié par chacune de ces sources.

b) Deux sources de courant en série :

Les deux sources doivent être identiques. Leur débit commun étant noté $\eta = \eta_1 = \eta_2$, la résistance reçoit une puissance $p = R\eta^2$, fournie pour moitié par chacune de ces sources.

EXERCICE 2.9 :

a) La résistance R est parcourue par le courant η dont la flèche est de sens opposé à celle de u_1 . On a donc $u_1 = R \eta$.

Par ailleurs, $u_2 = -u_1 + e = e - R\eta$

La résistance reçoit la puissance $p = u_1 \eta = R\eta^2$.

Les flèches associées à u_2 et η étant de sens opposés, la source de courant fournit la puissance :

$$p_1 = -u_2 \eta = (R\eta - e) \eta$$

La source de tension est parcourue par le courant η dont la flèche est de même sens que celle de e . Elle fournit donc la puissance :

$$p_2 = e \eta$$

On vérifie que la puissance reçue par la résistance est égale à la somme $p_1 + p_2$.

b) $p = 10 \text{ W}$: R est un récepteur.

$p_1 = 5 \text{ W}$: la source de courant fournit une puissance positive, et se comporte donc comme un générateur.

$p_2 = 5 \text{ W}$: la source de tension se comporte comme un générateur, pour la même raison.

c) $p = 10 \text{ W}$: R est un récepteur.

$p_1 = 15 \text{ W}$: la source de courant est un générateur.

$p_2 = -5 \text{ W}$: la source de tension est un récepteur.

EXERCICE 2.10 :

a) La tension aux bornes de la résistance et de la source de courant est égale à e . La puissance reçue par la résistance est donc :

$$p = e^2/R$$

Les flèches associées à e et à η étant de même sens, $p_1 = e \eta$ représente la puissance fournie par la source de courant.

Si on désigne par p_2 la puissance fournie par la source de tension :

$$p_1 + p_2 = p = e^2/R$$

soit : $p_2 = e^2/R - e\eta$

$= 2,5 \text{ W}$: R est un récepteur.

$= -5 \text{ W}$: la source de courant fournit une puissance négative, et se comporte donc comme un récepteur.

$p_2 = 7,5 \text{ W}$: la source de tension fournit une puissance positive, et se comporte donc comme un générateur.

EXERCICE 2.11 :

Le dipôle AB, dont la borne B est libre, n'est parcouru par aucun courant. Pour cette raison, u_3 est nul, et u_5 est égal à u_4 .

Les résistances de 1Ω et de 2Ω sont donc traversées par le courant que débite la source indépendante. Les flèches associées à ces deux tensions étant de sens opposés à celle du courant, $u_2 = 1 \text{ V}$; $u_4 = u_5 = 2 \text{ V}$. On en déduit :

$$u_1 = u_4 + u_2 = 3 \text{ V}.$$

EXERCICE 2.12 :

La tension u_1 est donnée par la loi d'Ohm : $u_1 = 2 \text{ V}$.

La tension aux bornes de la résistance de $1 \text{ k}\Omega$ vaut 2 V . On en déduit que u_2 est égal à 3 V .

u_3 est égal à la somme algébrique des 2 f.é.m., c'est à dire à -1 V .

$$u_4 = u_1 + u_2 + u_3 = 2 + 3 - 1 = 4 \text{ V}$$

La tension u' aux bornes de la résistance de $3 \text{ k}\Omega$ vaut -3 V . On en déduit :
 $u = u_4 - u' = 7 \text{ V}$.

EXERCICE 2.13 :

La tension e aux bornes de la résistance R est associée à une flèche de sens opposé à celle du courant i . On a donc d'après la loi d'Ohm :

$$e = Ri, \text{ soit : } i = e/R = 1 \text{ mA}.$$

Pour la même raison : $u' = R'\eta = 3R'i = 6 \text{ V}$.

EXERCICE 2.14 :

Les flèches associées à u_1 et η sont de sens opposés. On a donc :

$$u_1 = 1 \text{ V}.$$

Il en est de même des flèches associées à u_2 et η . Par conséquent :

$$u_2 = 2 \text{ V}.$$

La tension u_3 est égale à $-e$, soit : $u_3 = -e = -3u_2 = -6 \text{ V}$.

On calcule i par la loi d'Ohm : $i = -u_3/R = 2 \text{ mA}$.

Exercices sur le chapitre 3

EXERCICE 3.1 :

Les courants i_1 et i_3 sont affectés du signe +, et les deux autres courants du signe -.

La loi des nœuds s'écrit donc : $i_1 - i_2 + i_3 - i_4 = 0$

soit : $i_4 = i_1 - i_2 + i_3 = -2 - 1 + 5 = 2 \text{ A}$

i_4 étant positif à l'instant t , le courant conventionnel circule à cet instant dans le sens de la flèche associée, c'est-à-dire de A vers E.

EXERCICE 3.2 :

Explicitons la loi des nœuds sous la forme $\sum \vec{i} = 0$

en A : $-i_1 - i_2 - i_5 = 0$ (1)

en B : $i_3 - i_4 + i_5 = 0$ (2)

en C : $i_2 + i_4 - i_6 = 0$ (3)

On tire de la relation (1) : $i_5 = -i_1 - i_2 = -2 + 0,5 = -1,5 \text{ A}$. On reporte dans (3) la valeur de $i_4 = i_3 + i_5$ tirée de (2) ; on en déduit alors :

$$i_6 = i_2 + i_4 = i_2 + i_3 + i_5 = i_2 + i_3 - i_1 - i_2 = i_3 - i_1 = -1 \text{ A}.$$

EXERCICE 3.3 :

Explicitons la loi des nœuds sous la forme $\sum \vec{i} = 0$

en A : $i_1 + i_2 = 0$ (1)

en B : $-i_2 - i_3 - i_4 = 0$ (2)

en C : $i_3 + i_5 = 0$ (3)

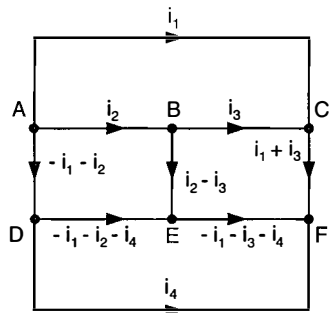
en D : $i_4 - i_5 - i_6 = 0$ (4)

en E : $-i_1 + i_6 = 0$ (5)

Des relations (1) et (5) on tire : $i_2 = -i_1 = -0,5 \text{ A}$, et $i_6 = i_1 = 0,5 \text{ A}$. On calcule i_3 à partir de (2) : $i_3 = -i_2 - i_4 = i_1 - i_4 = 3,5 \text{ A}$. i_5 est égal à $-i_3 = -3,5 \text{ A}$ d'après (3). La relation (4) permet de vérifier le calcul du dernier courant : $i_6 = i_4 - i_5 = 0,5 \text{ A}$.

EXERCICE 3.4 :

On calcule les courants par application de la première loi de Kirchhoff en cinq nœuds, par exemple en A, B, C, D et E. On vérifie ensuite que cette loi est bien satisfaite au sixième nœud, F. Les résultats de ces calculs sont reproduits sur la figure ci-contre.



EXERCICE 3.5 :

Explicitons la loi des nœuds sous la forme $\sum G u = \sum \eta$.

Le second membre comprend deux courants η et i , affectés du signe +, puisque les flèches associées sont dirigées vers le nœud. La tension aux bornes de l'élément résistif est égale à e . Celle-ci étant associée à une flèche dirigée vers A, le produit Ge au premier membre est affecté du signe +. On a donc au total :

$$Ge = \eta + i \text{ soit : } i = Ge - \eta$$

EXERCICE 3.6 :

a) Orientons la flèche associée à u' en direction de A (figure 1). Dans ce cas :

$$u' = -e + u.$$

En utilisant cette valeur pour expliciter la loi des nœuds en A, on obtient :

$$Gu + G'u' = \eta$$

soit :

$$Gu - G'e + G'u = (G + G')u - G'e = \eta$$

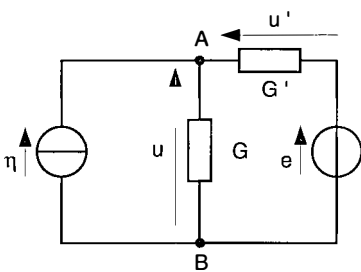
d'où l'on déduit : $u = \frac{\eta + G'e}{G + G'}$

b) Orientons la flèche associée à u' en sens inverse (figure 2). Dans ce cas :

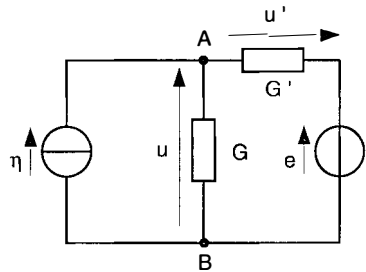
$$u' = e - u$$

et : $\eta = Gu - G'u' = (G + G')u - G'e$

On aboutit au même résultat que précédemment.



(1)



(2)

EXERCICE 3.7 :

La tension aux bornes de G' est égale à e . On a donc :

$$\text{en A : } Gu = \eta + \eta'$$

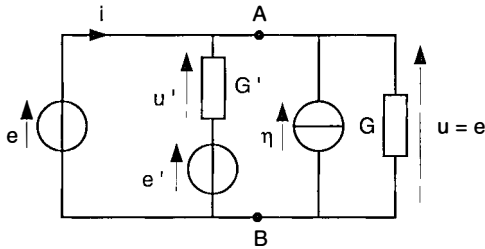
$$\text{en B : } -Gu + G'e = i - \eta'$$

$$\text{en C : } -G'e = -\eta - i$$

Si on additionne membre à membre ces trois relations, on aboutit à l'identité $0 = 0$, qui exprime que l'une d'elles peut s'obtenir en additionnant les deux autres.

EXERCICE 3.8 :

Le réseau proposé est un circuit à deux nœuds constitué par quatre dipôles disposés en parallèle. Le nœud A, qui relie les bornes supérieures de ces dipôles, peut être positionné à tout endroit sur la ligne équipotentielle supérieure, par exemple en son milieu. De la même manière, on peut placer le nœud B au milieu de la ligne équipotentielle inférieure.



Désignons par $u' = e - e'$ la tension aux bornes de la conductance G' , associée à une flèche dirigée vers A. La première loi de Kirchhoff s'écrit en ce nœud :

$$\begin{aligned} Ge + G'u' &= Ge + G'(e - e') = \eta + i \\ &= (G + G')e - G'e' \end{aligned}$$

On en déduit :

$$i = (G + G')e - G'e' - \eta$$

Ce réseau s'identifie à celui étudié précédemment lorsqu'on enlève le dipôle constitué par la source de tension de f.é.m. e' et la conductance G' . Cette opération peut se réaliser en prenant G' égal à 0. On retrouve alors l'expression de i :

$$i = Ge - \eta$$

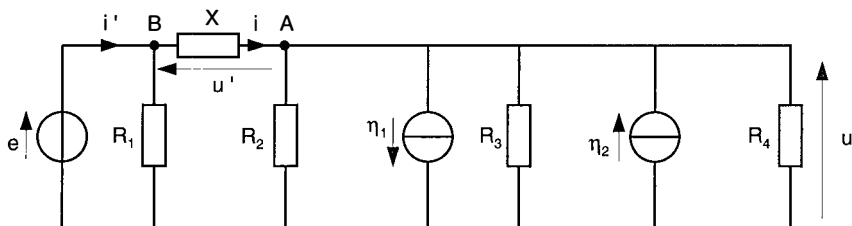
EXERCICE 3.9 :

a) Explicitons la loi des nœuds en A sous la forme $\sum G_{\vec{u}} = \sum \vec{\eta}$:

$$u/R_2 + u/R_3 + u/R_4 = i - \eta_1 + \eta_2$$

soit :

$$\begin{aligned} i &= \eta_1 - \eta_2 + u [1/R_2 + 1/R_3 + 1/R_4] \\ &= 4 - 2 + 3 [1 + 0,5 + 0,5] = 8 \text{ mA.} \end{aligned}$$



b) La tension u' aux bornes du dipôle X a pour valeur :

$$u' = e - u = 5 - 3 = 2 \text{ V}$$

La puissance qu'il reçoit est le produit :

$$p = u' i = 2.8 = 16 \text{ mW}$$

p étant positif, ce dipôle se comporte comme un récepteur.

c) Écrivons la loi des nœuds en B pour calculer le courant i' débité par la source de tension :

$$e/R_1 = i' - i$$

soit :

$$i' = i + e/R_1 = 8 + 5/1 = 13 \text{ mA.}$$

EXERCICE 3.10 :

a) Orientons la maille dans le sens des aiguilles d'une montre. e_1 et i_2 , dont les flèches sont dirigées dans ce sens, sont affectés du signe +, e_2 et i_1 du signe -. La loi des mailles s'écrit donc :

$$e_1 - e_2 = -R_1 i_1 + R_2 i_2$$

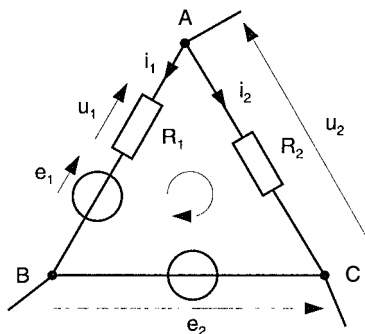
b) En posant : $u_1 = R_1 i_1$ et $u_2 = R_2 i_2$,

on obtient :

$$e_1 - e_2 + u_1 - u_2 = 0.$$

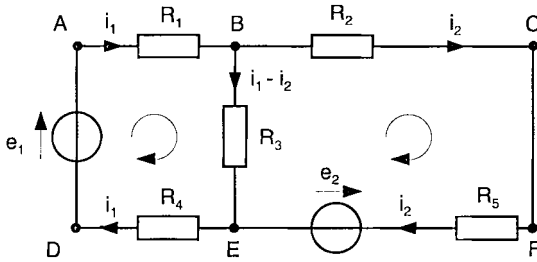
D'après la loi d'Ohm, les flèches associées à u_1 et u_2 sont dirigées en sens inverses des courants i_1 et i_2 .

c) On établit directement la relation $e_1 - e_2 + u_1 - u_2 = 0$ en explicitant la loi des mailles sous la forme $\sum_{\rightarrow M} u = 0$.



EXERCICE 3.11 :

a) D'après la loi des nœuds, le courant qui circule de B vers E est égal à $i_1 - i_2$.



b) Orientons les 3 mailles dans le sens des aiguilles d'une montre.

$$\text{maille ABED : } R_1 i_1 + R_3 (i_1 - i_2) + R_4 i_1 = (R_1 + R_3 + R_4) i_1 - R_3 i_2 = e_1$$

$$\text{maille BCFE : } R_2 i_2 + R_5 i_2 - R_3 (i_1 - i_2) = (R_2 + R_3 + R_5) i_2 - R_3 i_1 = -e_2$$

$$\text{maille ACFD : } R_1 i_1 + R_2 i_2 + R_5 i_2 + R_4 i_1 = (R_1 + R_4) i_1 + (R_2 + R_5) i_2 = e_1 - e_2$$

EXERCICE 3.12 :

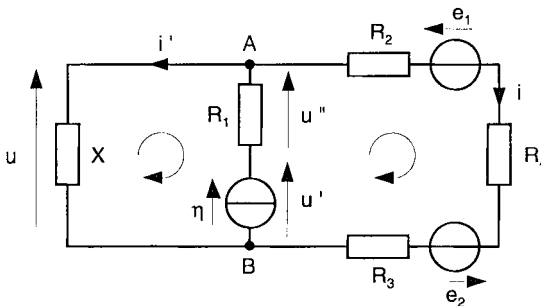
a) Explicitons la deuxième loi de Kirchhoff dans la maille de droite sous la forme

$$\sum_{\rightarrow M} R i = \sum_{\rightarrow M} e \text{ en orientant celle-ci dans le sens des aiguilles d'une montre :}$$

$$R_2 i + R_4 i + R_3 i = u - e_1 - e_2$$

soit :

$$\begin{aligned} u &= e_1 + e_2 + (R_2 + R_3 + R_4) i \\ &= -8 + 2 + (1 + 1 + 1)1 = -3 \text{ V} \end{aligned}$$



b) Désignons respectivement par u' et u'' les tensions aux bornes de la source de courant et de la résistance R_1 , orientées de B vers A. La résistance R_1 étant parcourue par le courant η : $u'' = -R_1 \eta$.

$$\text{et : } u = u' + u'' = u' - R_1 \eta$$

$$\text{soit : } u' = u + R_1 \eta = -3 + 1.2 = -1 \text{ V}$$

c) La loi des nœuds s'écrit en A : $-i' + \eta - i = 0$

soit : $i' = \eta - i = 2 - 1 = 1 \text{ mA}$.

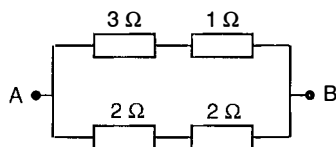
La puissance reçue par le dipôle X est : $p = u i' = -3 \text{ mW}$.

Ce dipôle fonctionne en générateur.

EXERCICE 3.13 :

Les résistances de 3Ω en parallèle équivalent à une résistance unique de 1Ω , les résistances de 3Ω et 6Ω à une résistance de 2Ω . la résistance équivalente au dipôle proposé est donc :

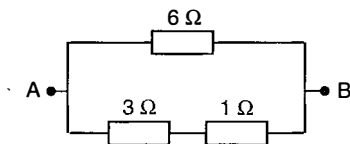
$$R = (3 + 1) // (2 + 2) = 4 // 4 = 2 \Omega$$



EXERCICE 3.14 :

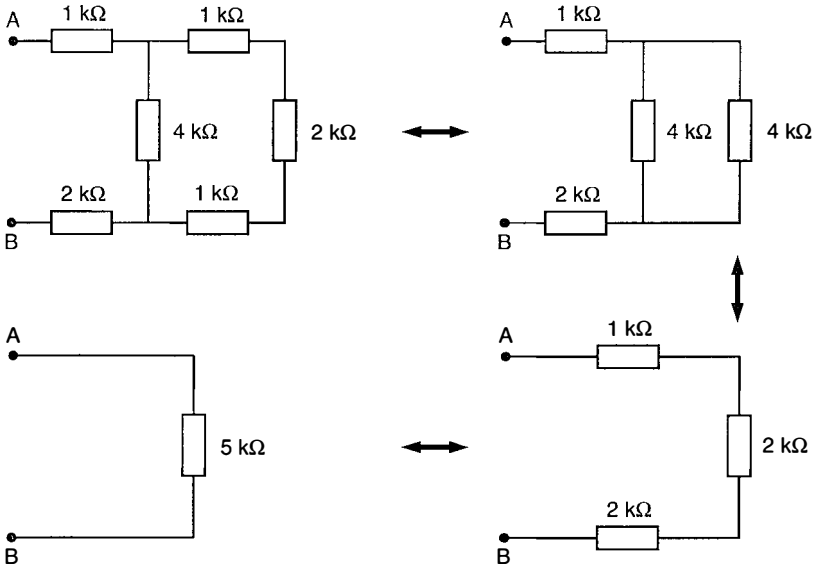
Les résistances de 12Ω et 4Ω sont en parallèle et équivalent donc à une résistance unique de 3Ω . Les résistances de 2Ω en parallèle équivalent à une résistance de 1Ω . La résistance équivalente à ce dipôle est donc :

$$R = (3 + 1) // 6 = 4 // 6 = 2,4 \Omega.$$



EXERCICE 3.15 :

On calcule la résistance équivalente en transformant successivement ce dipôle comme suit :

**EXERCICE 3.16 :**

L'association série R_1 , $R = [R_2 // (R_3 + R_4)]$ constitue un diviseur de tension. On a donc :

$$u = e \frac{R}{R + R_1} \quad \text{avec : } R = \frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4} = 10 \text{ k}\Omega$$

soit :

$$u = 8 \frac{10}{10 + 10} = 4 \text{ V}$$

L'association série R_3 , R_4 constitue un deuxième diviseur de tension :

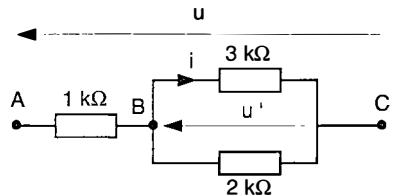
$$u' = u \frac{R_4}{R_3 + R_4} = 4 \frac{10}{10 + 10} = 2 \text{ V}$$

EXERCICE 3.17 :

Posons $u' = u_B - u_C$. Les flèches associées à u' et i étant de sens opposés dans la résistance de $3 \text{ k}\Omega$:

$$u' = R_2 i = 6 \text{ V}$$

L'association $R_2 // R_3$ est équivalente à la résistance :



$$R = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{2 \cdot 3}{2 + 3} = 1,2 \text{ k}\Omega$$

On se ramène alors à un diviseur de tension : $u' = u \frac{R}{R + R_1}$
soit :

$$u = u' \frac{R + R_1}{R} = 6 \frac{2,2}{1,2} = 11 \text{ V}$$

EXERCICE 3.18 :

Lorsque le pont est équilibré, le courant dans la branche BD est nul. Il en résulte que :

- $u_B = u_D$
- la liaison entre B et D peut être supprimée.

On fait apparaître ainsi deux diviseurs de tension pour lesquels on peut écrire :

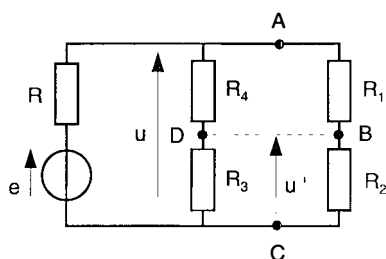
$$u' = u \frac{R_3}{R_3 + R_4} = u \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

soit :

$$R_3 (R_1 + R_2) = R_2 (R_3 + R_4)$$

et :

$$R_1 R_3 = R_2 R_4$$

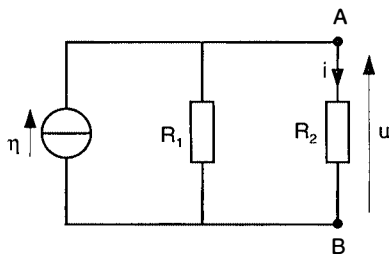
**EXERCICE 3.19 :**

Le montage étudié est un diviseur de courant. L'intensité du courant qui circule dans R_2 , de A vers B a pour valeur :

$$i = \eta \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

La loi d'Ohm relie cette intensité à la tension $u = u_A - u_B$:

$$u = R_2 i = \eta \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$



Les flèches associées à u et à i étant de sens opposés, la puissance reçue par R_2 est le produit :

$$p = ui = \eta^2 \frac{R_1^2 R_2}{(R_1 + R_2)^2}$$

Cette fonction de R_2 est nulle pour $R_2 = 0$ (u est alors égal à zéro), et R_2 infini (i est alors égal à zéro). Elle est positive pour toute autre valeur de R_2 , et admet par conséquent un maximum lorsque sa dérivée par rapport à R_2 est nulle. Dans le cas présent, plutôt que de calculer directement dp/dR_2 , il est préférable de passer par l'intermédiaire de la différentielle logarithmique de p :

$$\text{Ln } p = 2 \text{ Ln } \eta + 2 \text{ Ln } R_1 + \text{Ln } R_2 - 2 \text{ Ln } (R_1 + R_2) = f(R_2)$$

soit :

$$\frac{dp}{p} = \frac{dR_2}{R_2} - 2 \frac{dR_2}{R_1 + R_2}$$

La condition $dp/dR_2 = 0$ implique donc : $\frac{1}{R_2} = \frac{2}{R_1 + R_2}$

soit : $R_1 = R_2$. Lorsque cette condition est réalisée, $i = \eta/2$, et la puissance reçue par R_2 est maximale :

$$p_{\max} = \frac{R_2 \eta^2}{4} = \frac{R_1 \eta^2}{4}$$

EXERCICE 3.20 :

Désignons par i le courant qui circule dans ce circuit à une maille, dans le sens de la flèche associée à e_1 .

Orientons cette maille dans le même sens, et explicitons la deuxième loi de Kirchhoff sous la forme

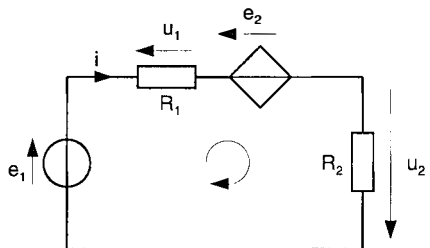
$$\sum_{\rightarrow M} R i = \sum_{\rightarrow M} e :$$

$(R_1 + R_2) i = e_1 - e_2$, avec : $e_2 = k u_2$

Les flèches associées à i et u_2 sont de même sens. On a donc :

$$u_2 = -R_2 i$$

soit : $e_1 = (R_1 + R_2) i + k u_2 = (R_1 + R_2 - k R_2) i$



et : $i = e_1 / [R_1 + R_2(1 - k)] = 3 \text{ mA}$.

La tension aux bornes de R_1 est $u_1 = R_1 i = 3 \text{ V}$

La tension aux bornes de R_2 est $u_2 = -R_2 i = -6 \text{ V}$

La f.é.m. de la source contrôlée a pour valeur $e_2 = k u_2 = -3 \text{ V}$. On vérifie ces résultats en explicitant la loi des mailles sous la forme $\sum_{\rightarrow M} u = 0$:

$$e_1 - u_1 - e_2 + u_2 = 6 - 3 + 3 - 6 = 0$$

La puissance reçue par un dipôle est égale au produit de la tension entre ses bornes par l'intensité du courant qui le traverse, lorsque les flèches associées sont de sens opposés.

la puissance reçue par R_1 est $p_1 = u_1 i = 9 \text{ mW}$

la puissance reçue par R_2 est $p_2 = -u_2 i = 18 \text{ mW}$

la puissance reçue par e_1 est $p_3 = -e_1 i = -18 \text{ mW}$

la puissance reçue par e_2 est $p_4 = e_2 i = -9 \text{ mW}$

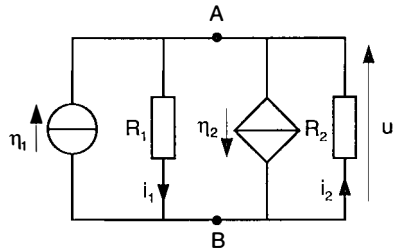
p_3 et p_4 étant négatifs, les sources de tensions se comportent comme des générateurs : on vérifie que la puissance $|p_3 + p_4|$ fournie par ces sources est égale à la puissance $p_1 + p_2$ absorbée par les éléments résistifs.

EXERCICE 3.21 :

Désignons par $u = u_A - u_B$ la tension aux bornes de ce circuit à 2 nœuds.

Les flèches associées à u et à i_2 étant de même sens : $u = -R_2 i_2$.

Explicitons la loi des nœuds sous la forme $\sum G \vec{u} = \sum \vec{\eta}$, en A :



$$u \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] = \eta_1 - \eta_2, \text{ avec : } \eta_2 = k i_2 = -k u / R_2$$

$$\text{soit : } \eta_1 = u \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] - k u / R_2$$

et :

$$u = \frac{\eta_1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1-k}{R_2}} = \frac{2}{\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2}} = 2 \text{ V}$$

Par application de la loi d'Ohm, on en déduit :

$$i_1 = u / R_1 = 1 \text{ mA}$$

$$i_2 = -u/R_2 = -2 \text{ mA}$$

$$\eta_2 = k i_2 = -1 \text{ mA}$$

On vérifie ces résultats en explicitant la loi des nœuds sous la forme $\sum \underline{i} = 0$:

$$\eta_1 - i_1 - \eta_2 + i_2 = 0 = 2 - 1 + 1 - 2$$

Les puissances reçues par ces dipôles sont :

$$p_1 = u i_1 = 2 \text{ mW pour } R_1$$

$$p_2 = -u i_2 = 4 \text{ mW pour } R_2$$

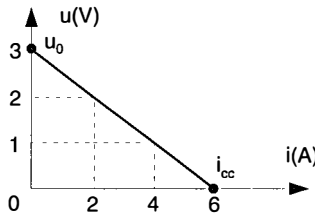
$$p_3 = -u \eta_1 = -4 \text{ mW pour } \eta_1$$

$$p_4 = u \eta_2 = -2 \text{ mW pour } \eta_2$$

p_3 et p_4 étant négatifs, les sources de courant se comportent comme des générateurs. On vérifie que la puissance $|p_3 + p_4|$ qu'elles fournissent est égale à la somme $p_1 + p_2$ des puissances absorbées par les éléments résistifs.

EXERCICE 3.22 :

a) Commençons par tracer la caractéristique du dipôle, sachant qu'elle est linéaire et qu'elle passe par les points de coordonnées (2,2) et (1,4).



Désignons par $u_0 = 3 \text{ V}$ et $i_{cc} = 6 \text{ A}$ ses points d'intersections avec les deux axes.

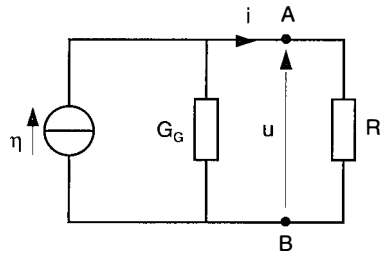
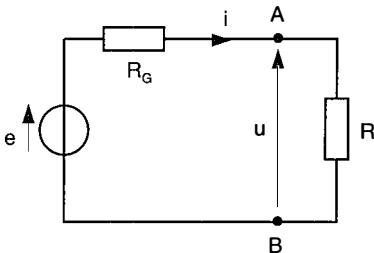
b) L'équation de cette caractéristique est :

$$u = u_0 - R_G i$$

$$i = i_{cc} - G_G u$$

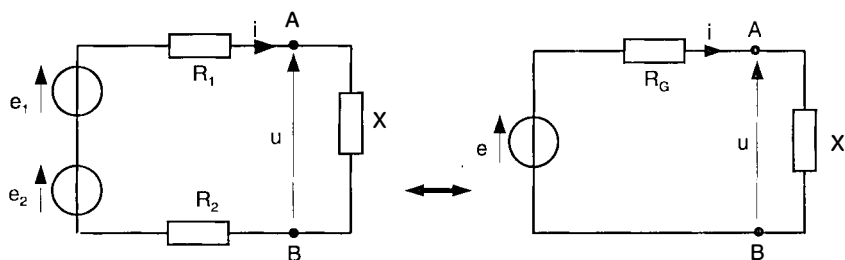
avec : $R_G = u_0/i_{cc} = 0,5 \Omega$, et : $G_G = 1/R_G = i_{cc}/u_0 = 2 \Omega^{-1}$

c) Ce dipôle peut être modélisé par les associations suivantes, avec $e = u_0 = 3 \text{ V}$, $\eta = i_{cc} = 6 \text{ A}$:



EXERCICE 3.23 :

a) Les deux réseaux ci-dessous sont équivalents pour tout dipôle X si u et i ont mêmes valeurs dans les deux cas.

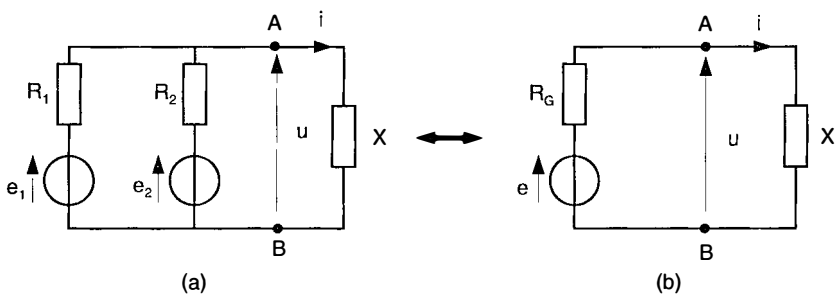


En utilisant les lois d'associations en série des sources de tension et des éléments résistifs, on établit les conditions :

$$e = e_1 + e_2 = 3 \text{ V}$$

$$R_G = R_1 + R_2 = 2,5 \Omega$$

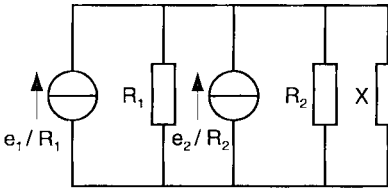
b) Il y a équivalence entre les deux schémas ci-dessous si u et i ont mêmes valeurs quelque soit X.



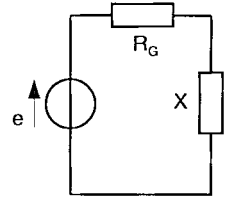
(a)

(b)

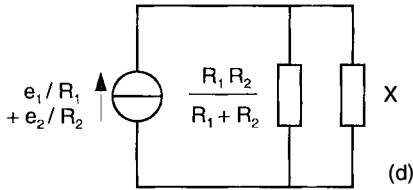
On transforme successivement le réseau (a) en (c), (d) puis (e). On l'identifie alors à (b).



(c)



(e)



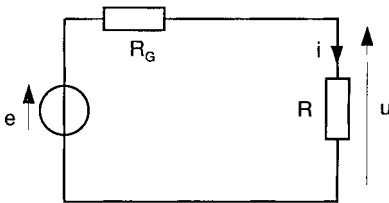
(d)

On en déduit :

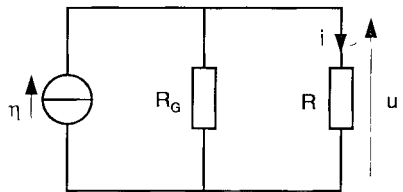
$$e = \frac{e_1 R_2 + e_2 R_1}{R_1 + R_2} = 1,5 \text{ V}, \quad \text{et} : R_G = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 0,4 \text{ } \Omega$$

EXERCICE 3.24 :

a) D'après les résultats de l'exercice 3.22, le dipôle G peut être modélisé par une source de tension de f.é.m. $e = u_0 = 12 \text{ V}$ en série avec une résistance $R_G = u_0 / i_{cc} = 12/4 = 3 \text{ } \Omega$ (figure a), ou encore par une source de courant de débit $\eta = i_{cc} = 4 \text{ A}$ en parallèle avec la résistance R_G (figure b).



(a)



(b)

La tension aux bornes de R vaut donc :

$$u = e \frac{R}{R + R_G} = 12 \frac{9}{3 + 9} = 9 \text{ V}$$

Le courant qui circule dans R a pour valeur : $i = u/R = 1 \text{ A}$

La puissance reçue par R est le produit : $p = u \cdot i = 9 \text{ W}$

b) La puissance dissipée dans R_G serait :

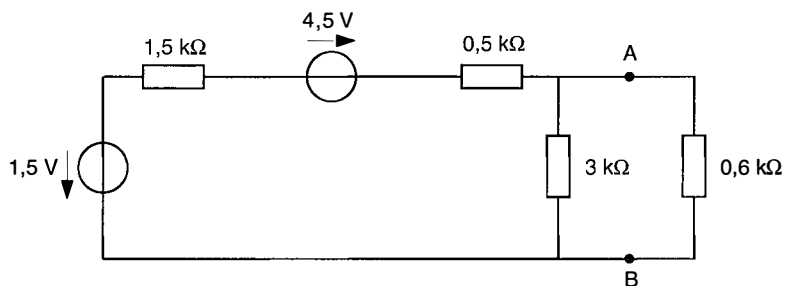
- $p_1 = R_G i^2 = 3 \text{ W}$, pour la modélisation de la figure a
- $p_2 = u^2/R_G = 81/3 = 27 \text{ W}$, pour la modélisation de la figure b

On constate que ces deux valeurs sont différentes : elles ne représentent, ni l'une ni l'autre, la puissance réellement dissipée dans G, celle-ci dépendant de sa constitution physique (inconnue).

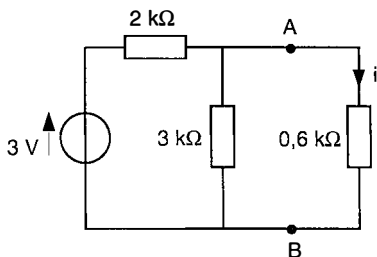
EXERCICE 3.25 :

Transformons le réseau étudié, successivement comme suit :

a) Remplaçons le générateur de courant ($1\text{mA} // 1,5 \text{ k}\Omega$) par le générateur de tension équivalent ($1,5 \text{ V} ; 1,5 \text{ k}\Omega$).

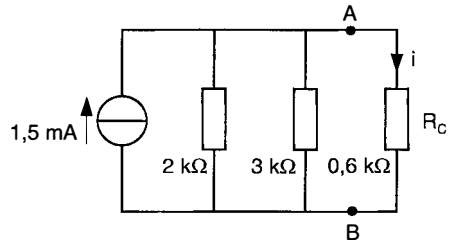


b) Regroupons les deux f.é.m. en série, ainsi que les résistances de $1,5 \text{ k}\Omega$ et de $0,5 \text{ k}\Omega$ en série. On obtient un générateur de tension unique ($3 \text{ V} ; 2 \text{ k}\Omega$).



c) Remplaçons ce générateur de tension par le générateur de courant équivalent ($1,5 \text{ mA} // 2 \text{ k}\Omega$). On calcule l'intensité i du courant au moyen de la relation du diviseur de courant :

$$i = 1,5 \frac{\frac{1}{0,6}}{\frac{1}{0,6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = 1 \text{ mA}$$

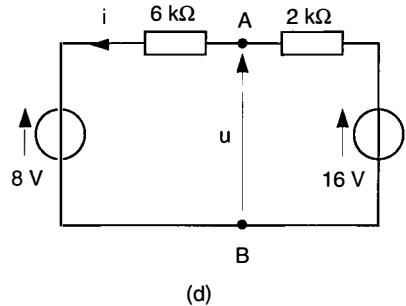
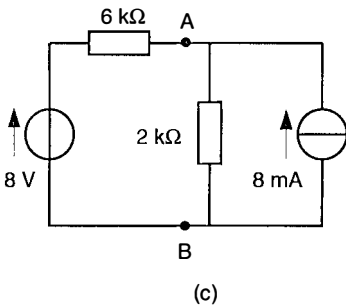
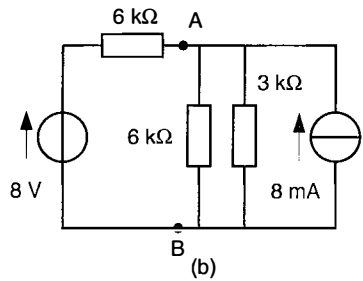
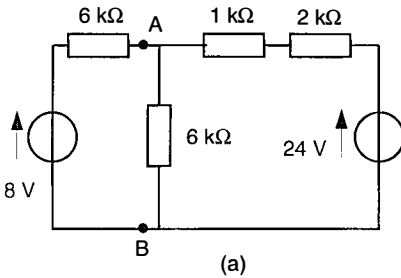


On en déduit alors la puissance absorbée par la résistance R_C :

$$p = R_C i^2 = 0,6 \text{ mW.}$$

EXERCICE 3.26 :

a) Transformons successivement comme suit le réseau étudié, en maintenant inchangé le générateur de tension :



L'analyse de la maille (d) fournit à la fois l'intensité i du courant qui traverse ce générateur, et la tension u entre ses bornes :

$$16 - 8 = (6 + 2) i \Rightarrow i = 8/8 = 1 \text{ mA}$$

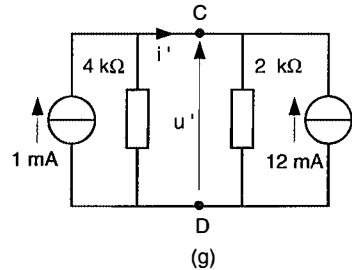
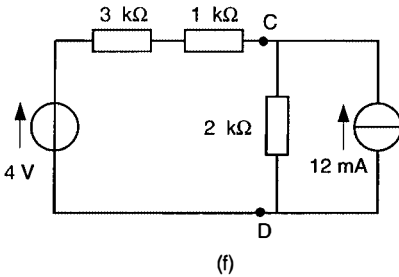
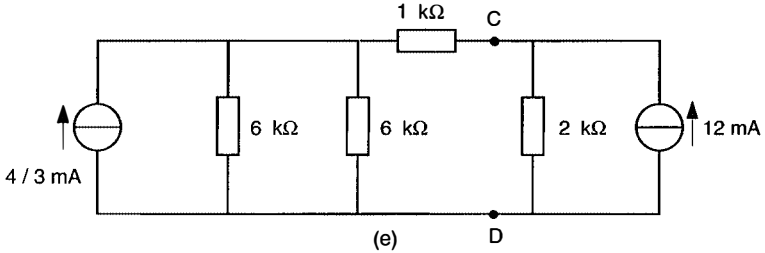
$$u = 8 + 6 \cdot 1 = 14 \text{ V}$$

Les flèches associées à ces deux grandeurs étant de sens opposés, le produit $u i$ représente la puissance reçue par le générateur de gauche :

$$p = u i = 14 \text{ mW}$$

p étant positif, ce générateur de tension se comporte comme un récepteur.

b) Transformons le réseau en maintenant inchangé le générateur de courant :



L'analyse du circuit à deux nœuds (g) fournit la tension u' aux bornes de ce générateur, ainsi que l'intensité i' du courant qui le traverse :

$$(1/4 + 1/2) u' = 12 + 1, \text{ soit : } u' = 52/3 = 17,3 \text{ V}$$

$$u'/2 = i' + 12, \text{ soit : } i' = u'/2 - 12 = 52/6 - 12 = -10/3 = -3,3 \text{ mA.}$$

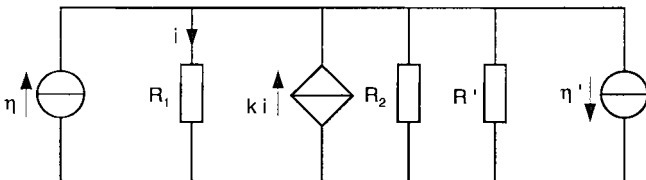
Les flèches associées à ces deux grandeurs sont de sens opposés ; leur produit représente donc la puissance p' reçue par le générateur de courant :

$$p' = u' i' = -520/9 \cong -58 \text{ mW}$$

p' étant négatif, ce dipôle se comporte en générateur.

EXERCICE 3.27 :

En associant les résistances R_3 , R_4 , et R_5 , on peut transformer le générateur de tension figurant à droite de R_2 en un générateur de courant ($\eta' // R'$), avec $R' = R_3 + (R_4 // R_5) = 24 \text{ k}\Omega$, et $\eta' = e / R' = 2 \text{ mA}$.



Le schéma équivalent parallèle ainsi obtenu peut encore être réduit en regroupant les sources de courant η et η' , ainsi que les résistances R_2 et R' : posons $R = R_2 // R' = 6 \text{ k}\Omega$, et $\eta_1 = \eta - \eta' = 7 \text{ mA}$. On obtient alors un schéma très simple, analogue à celui rencontré dans l'exercice 3. 21.

La loi des nœuds s'écrit en A :

$$u/R_1 + u/R = \eta_1 + ki, \text{ avec : } i = u/R_1$$

$$\text{soit : } \eta_1 = u/R_1 + u/R - ku/R_1 = u [1/R + (1-k)/R_1]$$

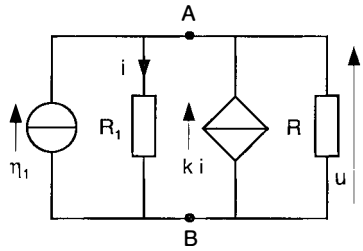
On en déduit :

$$u = \frac{\eta_1}{\frac{1}{R} + \frac{1-k}{R_1}} = \frac{7}{\frac{1}{6} + \frac{0,2}{3}} = \frac{42}{1,4} = 30 \text{ V}$$

L'intensité du courant dans R_1 vaut donc : $i = 30/3 = 10 \text{ mA}$.

Les flèches associées à u et à ki étant de même sens, la source contrôlée fournit une puissance :

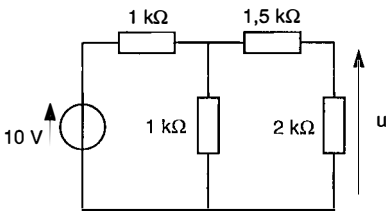
$$p = u.ki = 30 \cdot 0,8 \cdot 10 = 240 \text{ mW}$$



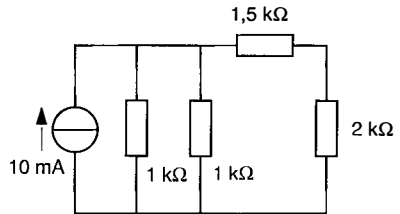
EXERCICE 3.28 :

Par transformations successives du réseau initial, on aboutit au diviseur de tension (e).

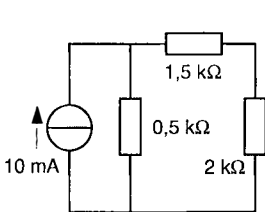
La tension u a donc pour valeur : $u = 5 \frac{2}{2+2} = 2,5 \text{ V}$



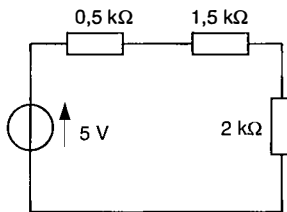
(a)



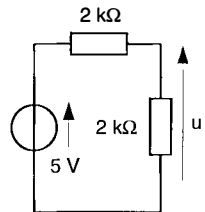
(b)



(c)



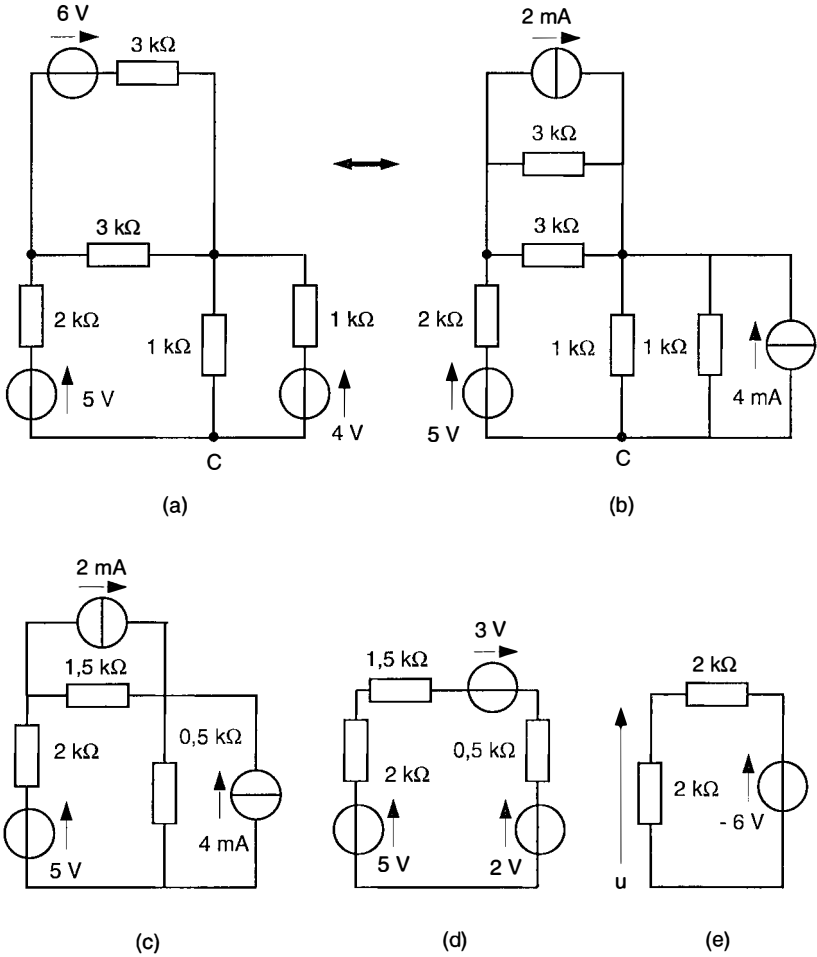
(d)



(e)

EXERCICE 3.29 :

Transformons successivement comme suit le réseau étudié :



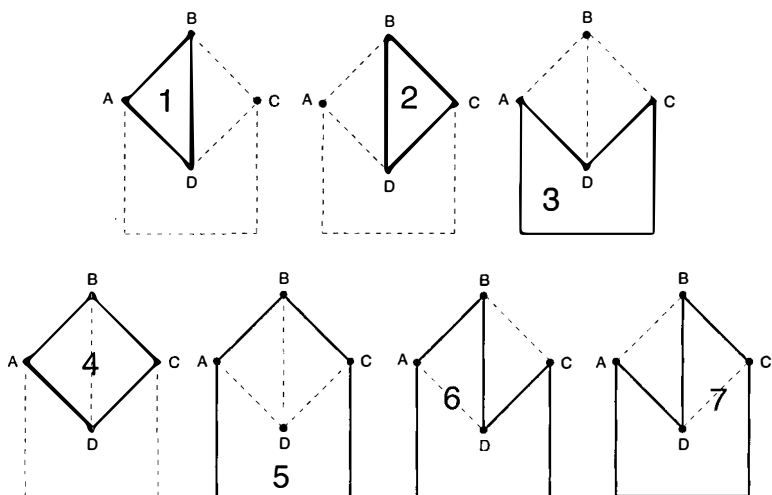
L'analyse du diviseur de tension (e) montre que :

$$u = -6 \cdot 2 / (2 + 2) = -3 \text{ V.}$$

Exercices sur le chapitre 4

EXERCICE 4.1 :

- a) Ce réseau comprend $N = 4$ nœuds (A, B, C, D) et $B = 6$ branches (AB, BC, CD, DA, BD, AC). Le nombre de mailles indépendantes est $B - N + 1 = 3$.
- b) Dans ce réseau, on peut isoler les 7 mailles représentées ci-dessous :

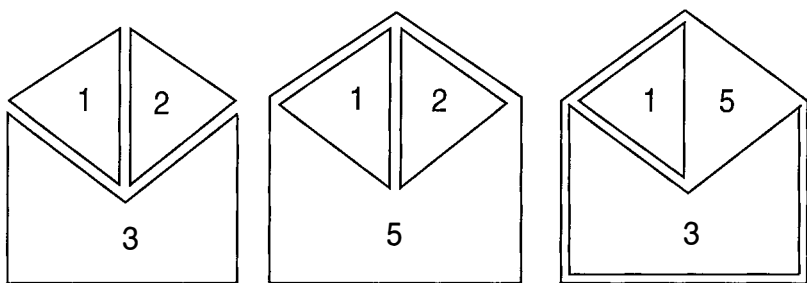


La construction du système de mailles indépendantes peut se faire en respectant la condition suivante : toute branche du réseau doit appartenir à une maille au moins, et à deux mailles au plus. On peut alors définir plusieurs systèmes incluant la maille 1 (ABD) :

système (a) : mailles 1, 2, 3

système (b) : mailles 1, 2, 5

système (c) : mailles 1, 3, 5



(a)

(b)

(c)

EXERCICE 4.2 :

a) Ce réseau comporte $N = 3$ nœuds (B, C, E) et $B = 5$ branches (BAE, BC, BE, CE, CDE). Le nombre $B - N + 1$ de mailles indépendantes est donc égal à 3.

b) Celles-ci peuvent être constituées par les ensembles suivants :

ABE, ECD, et EBC

ABE, ECD, et ABCE

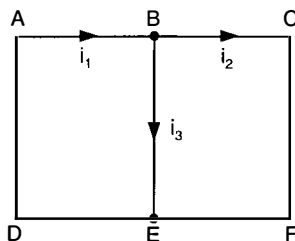
ABE, ECD, et BCDE

ABE, ECD, et ABCDE

EXERCICE 4.3 :

a) Ce réseau comporte deux nœuds (B et E), 3 branches (BADE, BE, BCFE), et deux mailles indépendantes.

b) Définissons les courants inconnus, par exemple comme suit :



La détermination de ces trois inconnues nécessite la résolution d'un système de trois équations :

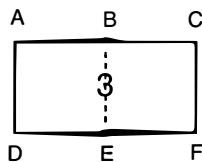
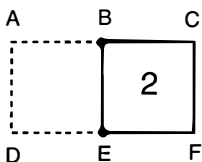
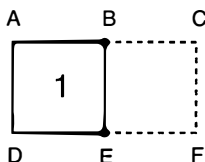
$N - 1 = 1$ équation de nœuds

$B - N + 1 = 2$ équations de mailles.

• Explicitons la première loi de Kirchhoff sous la forme $\sum \vec{i} = 0$ en l'un des nœuds du réseau, par exemple en B :

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0 \quad (1)$$

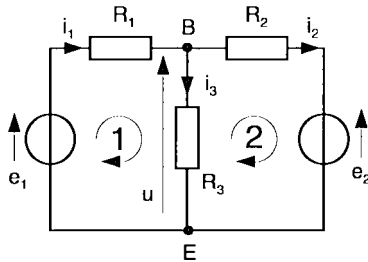
• Le réseau comporte trois mailles :



Les systèmes de mailles 1 + 2, 1 + 3, ou 2 + 3 sont indépendants, et peuvent être utilisés pour établir les deux équations de mailles nécessaires. Choisissons les mailles 1 et 2, en les orientant (par exemple) dans le sens des aiguilles d'une montre. On peut alors expliciter la deuxième loi de Kirchhoff sous la forme $\sum_{\rightarrow M} R i = \sum_{\rightarrow M} e$:

$$\begin{aligned} \text{maille 1 : } R_1 i_1 + R_3 i_3 &= e_1 \\ 2 i_1 + i_3 &= 2 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{maille 2 : } R_2 i_2 - R_3 i_3 &= -e_2 \\ 3 i_2 - i_3 &= -1 \end{aligned} \quad (3)$$



La résolution du système d'équations (1), (2), (3) par la méthode de Cramer fournit la valeur du courant i_3 :

$$i_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-6-2}{-3-2-6} = \frac{8}{11} = 0,73 \text{ A}$$

On en déduit $u = R_3 i_3 = 0,73 \text{ V}$.

EXERCICE 4.4 :

a) Le système de six équations nécessaire au calcul des six courants inconnus comprend :

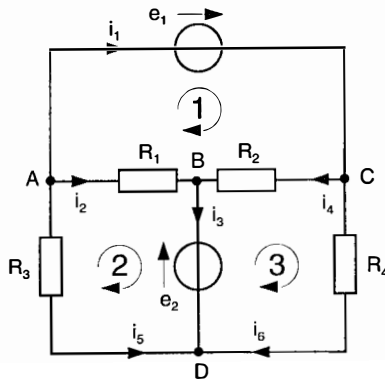
- trois équations de nœuds fournies par la première loi de Kirchhoff :

$$\text{en A : } -i_1 - i_2 - i_5 = 0 \quad (1)$$

$$\text{en B : } i_2 - i_3 + i_4 = 0 \quad (2)$$

$$\text{en C : } i_1 - i_4 - i_6 = 0 \quad (3)$$

- trois équations de mailles fournies par la deuxième loi de Kirchhoff. On peut choisir les mailles représentées ci-dessous, et les orienter, par exemple, dans le sens des aiguilles d'une montre.



On obtient alors :

$$\text{maille 1 : } -R_1 i_2 + R_2 i_4 = e_1 \quad (4)$$

$$\text{maille 2 : } R_1 i_2 - R_3 i_5 = -e_2 \quad (5)$$

$$\text{maille 3 : } -R_2 i_4 + R_4 i_6 = e_2 \quad (6)$$

b) Éliminons i_4 au moyen de (2) : $i_4 = -i_2 + i_3$

éliminons i_5 au moyen de (1) : $i_5 = -i_1 - i_2$

éliminons i_6 au moyen de (3) et (2) : $i_6 = i_1 - i_4 = i_1 + i_2 - i_3$.

Les trois équations de mailles s'écrivent alors :

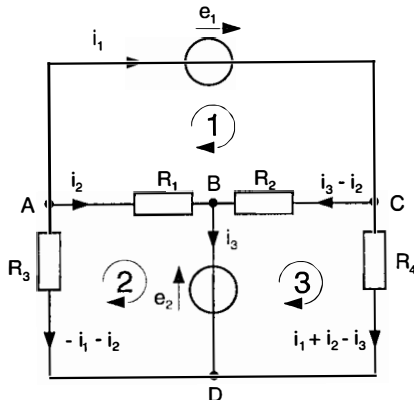
$$\text{maille 1 : } -R_1 i_2 + R_2 (-i_2 + i_3) = -(R_1 + R_2) i_2 + R_2 i_3 = e_1$$

$$\text{maille 2 : } R_1 i_2 - R_3 (-i_1 - i_2) = R_3 i_1 + (R_1 + R_3) i_2 = -e_2$$

$$\begin{aligned} \text{maille 3 : } & -R_2 (-i_2 + i_3) + R_4 (i_1 + i_2 - i_3) \\ & = R_4 i_1 + (R_2 + R_4) i_2 - (R_2 + R_4) i_3 = e_2 \end{aligned}$$

EXERCICE 4.5 :

a) Les courants inconnus sont exprimés en fonction de i_1, i_2, i_3 par application de la loi des nœuds en A, B, et C.



b) Les équations de mailles s'explicitent comme suit :

$$\text{maille 1 : } -R_1 i_2 + R_2 (-i_2 + i_3) = -(R_1 + R_2) i_2 + R_2 i_3 = e_1$$

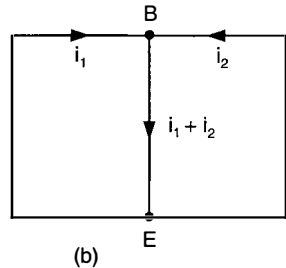
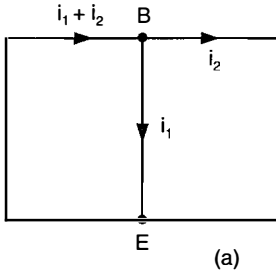
$$\text{maille 2 : } R_1 i_2 + R_3 (i_1 + i_2) = R_3 i_1 + (R_1 + R_3) i_2 = -e_2$$

$$\begin{aligned} \text{maille 3 : } & -R_2 (-i_2 + i_3) + R_4 (i_1 + i_2 - i_3) \\ & = R_4 i_1 + (R_2 + R_4) i_2 - (R_2 + R_4) i_3 = e_2 \end{aligned}$$

On aboutit évidemment au même système d'équations que dans l'exercice précédent.

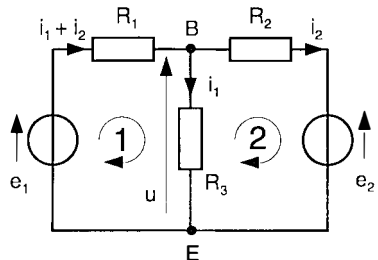
EXERCICE 4.6 :

Dans ce réseau, il suffit d'introduire $B - N + 1 = 2$ courants inconnus, et d'en déduire le troisième par application immédiate de la première loi de Kirchhoff en l'un des nœuds. Il y a plusieurs choix possibles, parmi lesquels ceux représentés ci-dessous en (a) et (b) :



Le choix (a) est mieux adapté que (b) pour le calcul de la tension aux bornes de R_3 , dans la mesure où il ne nécessite que le calcul d'une seule inconnue (i_1) au lieu de 2 (i_1 et i_2).

Si on choisit les mailles 1 et 2 définies dans l'exercice 4.3, et si on les oriente dans le sens des aiguilles d'une montre, on aboutit, par application de la deuxième loi de Kirchhoff, au système suivant :



$$\text{maille 1 : } R_1 (i_1 + i_2) + R_3 i_1 = (R_1 + R_3) i_1 + R_1 i_2 = e_1$$

$$\text{maille 2 : } R_2 i_2 - R_3 i_1 = -e_2$$

soit :

$$3 i_1 + 2 i_2 = 2$$

$$-i_1 + 3 i_2 = -1$$

$$\text{On en déduit : } i_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \\ 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{8}{11} = 0,73 \text{ A}$$

et $u = R_3 i_1 = 0,73 \text{ V}$.

N.B. : l'analyse de ce réseau par la méthode simplifiée des courants de branches peut se faire de multiples façons. Nous engageons le lecteur à reprendre cet exercice :

a) En raisonnant sur le réseau (b) ci-dessus, avec le même choix de mailles, pour calculer i_1 et i_2 , puis $u = R_3 (i_1 + i_2)$.

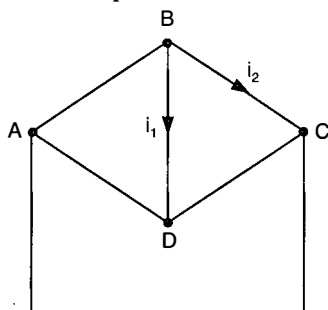
b) En raisonnant sur le réseau (a), mais en choisissant cette fois les mailles indépendantes 1 et 3 définies dans l'exercice 4. 3.

EXERCICE 4.7 :

L'analyse de ce réseau nécessite $B - N + 1 = 3$ inconnues parmi lesquelles doit figurer le courant i . Le choix des deux autres inconnues peut être réalisé de multiples façons. Nous présentons ici l'un des choix possibles :

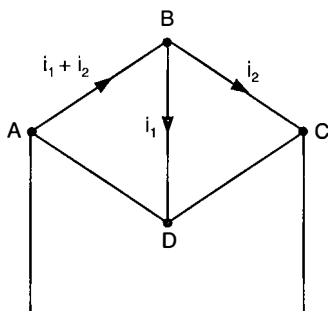
étape (a) :

Au nœud B, où aboutissent trois branches, on définit deux inconnues : $i_1 = i$, et i_2 circulant par exemple de B vers C.



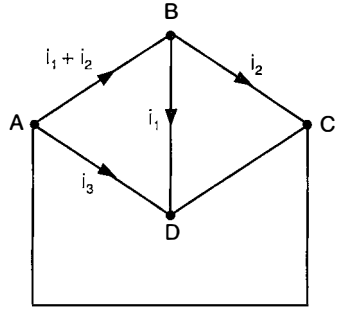
étape (b) :

D'après la loi des nœuds en B, le courant circulant de A vers B vaut alors $i_1 + i_2$.



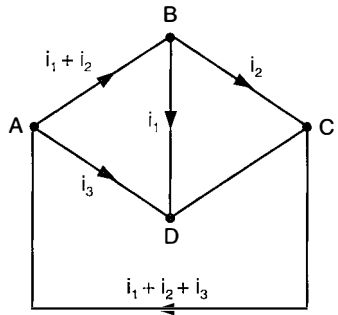
étape (c) :

On choisit un deuxième nœud, par exemple A, où aboutissent trois branches. On connaît le courant dans la branche AB. On se contente donc d'introduire une seule inconnue, par exemple le courant i_3 dirigé de A vers D.



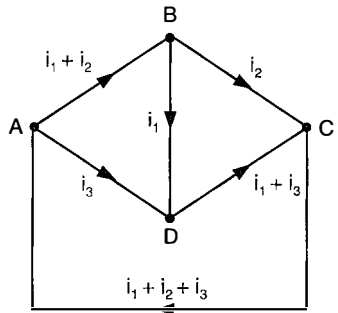
étape (d) :

d'après la loi des nœuds en A, le courant qui circule de C vers A est $i_1 + i_2 + i_3$.



étape (e) :

On choisit un troisième nœud, par exemple D, où aboutissent encore trois branches. Il est inutile d'introduire ici de nouvelles inconnues, dans la mesure où on connaît déjà deux courants : la loi des nœuds permet le calcul du courant circulant de D vers C : $i_1 + i_3$.



étape (f) :

On vérifie que la première loi de Kirchhoff est bien satisfaite au dernier nœud C du réseau :

$$i_1 + i_3 + i_2 - i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

Cette vérification simple permet la détection d'éventuelles erreurs de calculs.

étape (g) :

On sélectionne un ensemble de mailles indépendantes (cf exercice 4.1), par exemple les mailles 1, 2, 3, que l'on oriente (par exemple) dans le sens des aiguilles d'une montre.

étape (h) :

On explicite la loi des mailles sous la forme : $\sum_{\rightarrow M} R i = \sum_{\rightarrow M} e$

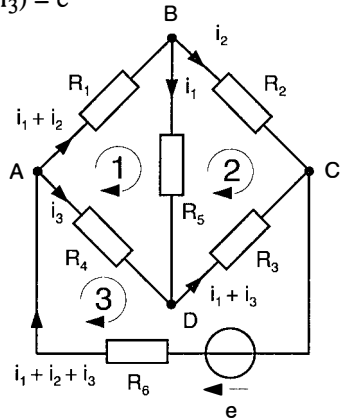
maille 1 : $R_1 (i_1 + i_2) + R_5 i_1 - R_4 i_3 = 0$

maille 2 : $R_2 i_2 - R_3 (i_1 + i_3) - R_5 i_1 = 0$

maille 3 : $R_6 (i_1 + i_2 + i_3) + R_4 i_3 + R_3 (i_1 + i_3) = e$

soit :

$$\begin{aligned} (R_1 + R_5) i_1 + R_1 i_2 - R_4 i_3 &= 0 \\ -(R_3 + R_5) i_1 + R_2 i_2 - R_3 i_3 &= 0 \\ (R_3 + R_6) i_1 + R_6 i_2 \\ + (R_3 + R_4 + R_6) i_3 &= e \end{aligned}$$



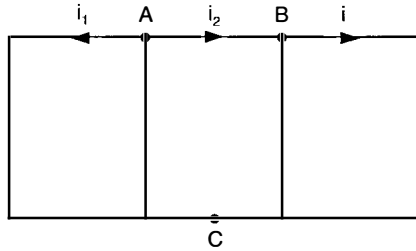
L'analyse de ce système d'équations par la méthode de Cramer permet le calcul du courant i_1 :

$$i_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & R_1 & -R_4 \\ 0 & R_2 & -R_3 \\ e & R_6 & R_3 + R_4 + R_6 \end{vmatrix} = \frac{e[-R_1 R_3 + R_2 R_4]}{\Delta}$$

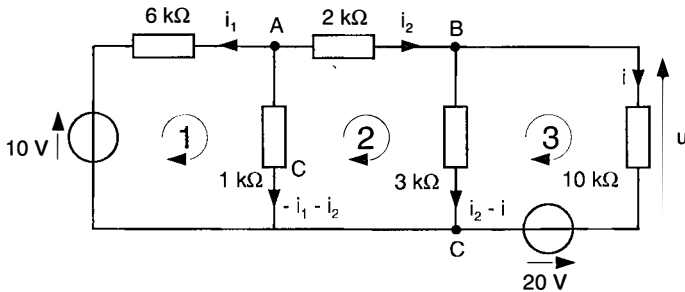
La condition $i = i_1 = 0$ est réalisée lorsque $R_1 R_3 = R_2 R_4$.

EXERCICE 4.8 :

Ce réseau comporte trois nœuds (A, B, C) et 5 branches. Il faut donc définir $B - N + 1 = 3$ courants inconnus, en faisant en sorte que l'un de ces courants s'identifie à i . Les deux autres inconnues, i_1 et i_2 peuvent être définies par exemple comme suit :



On détermine les courants dans les deux branches restantes par application de la loi des nœuds en A et B. On explicite enfin la loi des mailles dans le réseau orienté, par exemple, dans le sens des aiguilles d'une montre :



$$\text{maille 1 : } -6 i_1 + 1 (-i_1 - i_2) = -7 i_1 - i_2 = 10$$

$$\text{maille 2 : } (i_1 + i_2) + 2 i_2 + 3 (i_2 - i) = i_1 + 6 i_2 - 3 i = 0$$

$$\text{maille 3 : } -3(i_2 - i) + 10 i = -3 i_2 + 13 i = -20$$

La résolution de ce système (cf exemple 2, § 2.3 en annexe) fournit la valeur de i :

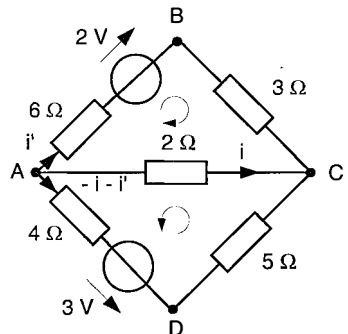
$$i = -1,68 \text{ mA}$$

Par application de la loi d'Ohm, on en déduit ensuite la tension $u = -16,8 \text{ V}$.

EXERCICE 4.9 :

Ce réseau comporte $N = 2$ nœuds et $B = 3$ branches. Sa résolution nécessite $B - N + 1 = 2$ équations de mailles. Au nœud A, où aboutissent trois branches, le courant qui circule de A vers C est déjà défini.

Désignons par i' le courant qui circule de A vers B. D'après la loi des nœuds



écrite en A, le courant qui circule de A vers D est alors égal à $-i - i'$.
Orientons (par exemple) la maille ABCA dans le sens des aiguilles d'une montre, et la maille ACDA dans le sens trigonométrique.

Explicitons la deuxième loi de Kirchhoff dans les deux mailles sous la forme

$$\sum_{\rightarrow M} R i = \sum_{\rightarrow M} e :$$

maille ABCA : $6 i' + 3 i' - 2 i = 2$

maille ACDA : $-4 (i + i') - 5(i + i') - 2 i = 3$

Le courant i est solution du système :

$$9 i' - 2 i = 2$$

$$-9 i' - 11 i = 3$$

En additionnant membre à membre ces deux relations, on obtient :

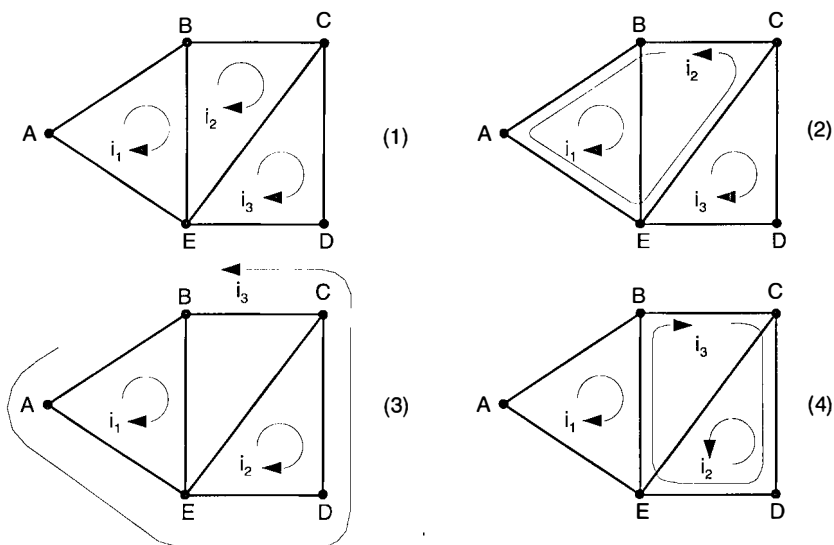
$$-13 i = 5$$

soit :

$$i = -5 / 13 = -0,38 \text{ A}$$

EXERCICE 4.10 :

a) les courants de mailles sont choisis de telle sorte qu'ils circulent en sens inverses dans les branches communes à deux mailles. Le sens du courant de maille ABE détermine alors celui des autres courants. Aux quatre systèmes de mailles indépendantes correspondent les courants représentés ci-dessous :



b) Le système (3) dont les courants de mailles 1 et 2 s'identifient aux inconnues permet leur calcul direct.

EXERCICE 4.11 :

a) Les équations de mailles s'écrivent numériquement :

$$\text{maille 1 : } 3 i_1 - 2 i_2 = 1$$

$$\text{maille 2 : } -2 i_1 + 9 i_2 - 4 i_3 = 0$$

$$\text{maille 3 : } -4 i_2 + 9 i_3 = -2$$

On en déduit :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & -4 \\ 0 & -4 & 9 \end{vmatrix} = 3(81 - 16) + 2(-18) = 159$$

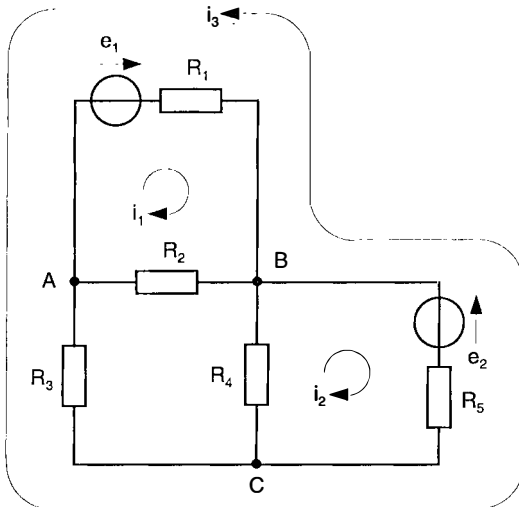
et :

$$i_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 9 & -4 \\ -2 & -4 & 9 \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} [65 - 28] = \frac{49}{159} = 0,31 \text{ mA}$$

La tension aux bornes de la résistance R_1 vaut donc :

$$u = R_1 i_1 = 0,31 \text{ V.}$$

b)



Le sens du courant de maille i_1 détermine celui du courant i_3 . Ce dernier détermine à son tour celui de i_2 . Les équations de mailles s'écrivent alors :

$$\text{maille 1 : } (R_1 + R_2) i_1 - R_1 i_3 = e_1$$

$$\text{maille 2 : } (R_4 + R_5) i_2 - R_5 i_3 = -e_2$$

$$\text{maille 3 : } -R_1 i_1 - R_5 i_2 + (R_1 + R_3 + R_5) i_3 = e_2 - e_1$$

soit numériquement :

$$3 i_1 - i_3 = 1$$

$$9 i_2 - 5 i_3 = -2$$

$$-i_1 - 5 i_2 + 9 i_3 = 1$$

Le déterminant de ce système vaut :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 9 & -5 \\ -1 & -5 & 9 \end{vmatrix} = 3.56 - 1.9 = 159$$

Le calcul de la tension u aux bornes de R_1 est plus long qu'avec le choix précédent des mailles indépendantes, dans la mesure où il faut déterminer ici deux courants : i_1 et i_3 .

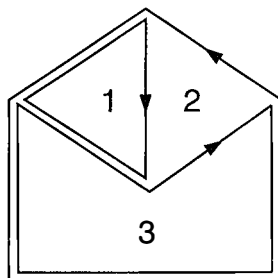
$$i_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 9 & -5 \\ 1 & -5 & 9 \end{vmatrix} = \frac{55}{159}$$

$$i_3 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & -2 \\ -1 & -5 & 1 \end{vmatrix} = \frac{6}{159}$$

$$\text{On en déduit } u = R_1 (i_1 - i_3) = \frac{49}{159} = 0,31 \text{ V.}$$

EXERCICE 4.12 :

Pour analyser rapidement ce réseau par la méthode des mailles, il faut faire en sorte que le courant inconnu puisse être assimilé à l'un des courants de mailles : celui de la maille ABD, ou celui de la maille BCD.



Ce réseau a fait l'objet d'une première étude dans l'exercice 4. 1 : On peut choisir par exemple les mailles indépendantes représentées ci-dessus, et les renuméroter 1, 2, 3. Le sens des courants i_2 et i_3 est déterminé par celui de $i_1 = i$. La mise en équation du réseau conduit aux relations :

maille 1 :

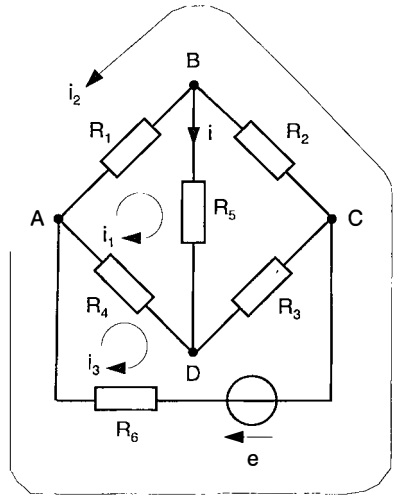
$$(R_1 + R_4 + R_5)i_1 - R_1 i_2 - R_4 i_3 = 0$$

maille 2 :

$$-R_1 i_1 + (R_1 + R_2 + R_6) i_2 - R_6 i_3 = -e$$

maille 3 :

$$-R_4 i_1 - R_6 i_2 + (R_3 + R_4 + R_6) i_3 = e$$



Le déterminant de ce système est :

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_1 + R_4 + R_5 & -R_1 & -R_4 \\ -R_1 & R_1 + R_2 + R_6 & -R_6 \\ -R_4 & -R_6 & R_3 + R_4 + R_6 \end{vmatrix}$$

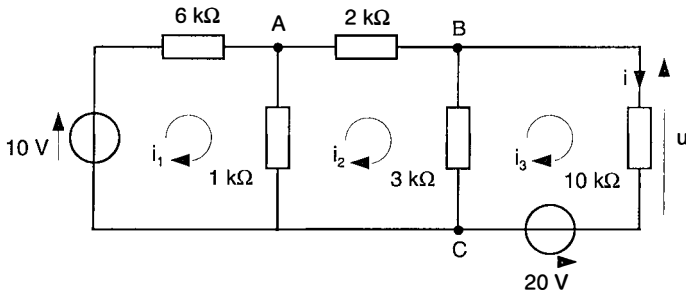
Le courant i a pour valeur :

$$\begin{aligned} i = i_1 &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & -R_1 & -R_4 \\ -e & R_1 + R_2 + R_6 & -R_6 \\ e & -R_6 & R_3 + R_4 + R_6 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\Delta} \left[e(-R_1[R_3 + R_4 + R_6] - R_4 R_6) + e(R_1 R_6 + R_4[R_1 + R_2 + R_6]) \right] \\ &= \frac{e}{\Delta} [-R_1 R_3 - R_1 R_4 - R_1 R_6 - R_4 R_6 + R_1 R_6 + R_1 R_4 + R_2 R_4 + R_4 R_6] \\ &= \frac{e}{\Delta} [-R_1 R_3 + R_2 R_4] \end{aligned}$$

La condition $i = 0$ est satisfaite lorsque $R_1 R_3 = R_2 R_4$.

EXERCICE 4.13 :

Ce réseau comporte trois nœuds (A, B, C) et cinq branches. On peut choisir les $B - N + 1 = 3$ mailles indépendantes ci-dessous, avec des courants i_1 , i_2 , et i_3 . Le courant de maille i_3 s'identifie alors au courant inconnu i .



Le système d'équations de mailles s'écrit :

$$\text{maille 1 : } 7 i_1 - i_2 = 10$$

$$\text{maille 2 : } -i_1 + 6 i_2 - 3 i_3 = 0$$

$$\text{maille 3 : } -3 i_2 + 13 i_3 = -20$$

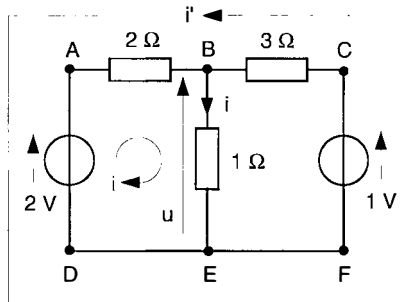
On en déduit successivement :

$$i = i_3 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -1 & 10 \\ -1 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & -20 \\ 7 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 13 \end{vmatrix}}{470} = -1,68 \text{ mA}$$

et $u = -16,8 \text{ V}$.

EXERCICE 4.14 :

La résolution du réseau nécessite le choix de $B - N + 1 = 2$ mailles indépendantes. Pour déterminer directement le courant i , il faut faire en sorte que la branche BE n'appartienne qu'à l'une de ces mailles, par exemple ABED, et qu'il en constitue le courant de maille. Pour satisfaire à cette condition, on choisit comme seconde maille, la maille ADFC, et on oriente son courant i' de B vers A, c'est à dire en sens inverse de celui de i dans la branche commune BADE.



Le système d'équations de mailles s'explique alors comme suit :

$$\text{maille ABED} : (2 + 1) i - 2 i' = 2$$

$$\text{maille ADFC} : -2 i + (2 + 3) i' = -2 + 1$$

$$\text{soit} : 3 i - 2 i' = 2$$

$$-2 i + 5 i' = -1$$

On en déduit :

$$i = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{10 - 2}{15 - 4} = \frac{8}{11} = 0,73 \text{ A, et } u = 0,73 \text{ V.}$$

EXERCICE 4.15 :

Définissons les deux courants de mailles i_1 et i_2 conformément à la figure ci-contre. Les équations de mailles s'écrivent alors :

$$5 i_1 - 4 i_2 = 5$$

$$-4 i_1 + 6 i_2 = 2u'$$

Dans la deuxième relation, on élimine la f.é.m. ($2u'$) de la source contrôlée en l'exprimant en fonction des inconnues :

$$u' = 4 (i_1 - i_2) \text{ soit} : 8 (i_1 - i_2) = -4 i_1 + 6 i_2$$

Le système d'équations de mailles s'écrit en définitive :

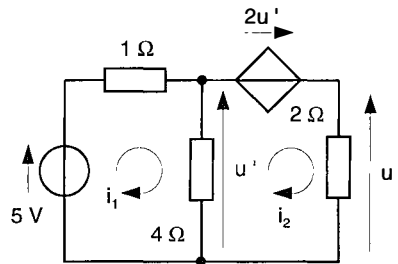
$$-12 i_1 + 14 i_2 = 0$$

$$5 i_1 - 4 i_2 = 5$$

On en déduit :

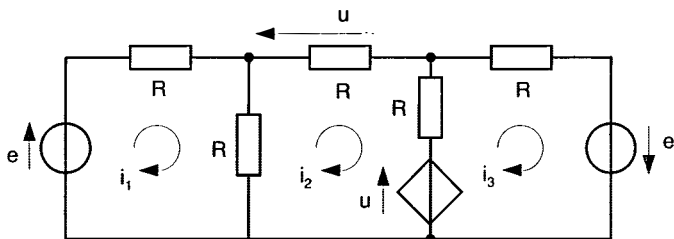
$$i_2 = \frac{\begin{vmatrix} -12 & 0 \\ 5 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -12 & 14 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{-60}{12 \cdot 4 - 5 \cdot 14} = \frac{60}{-48 + 70} = 2,72 \text{ A}$$

$$\text{et} : u = R_3 i_2 = 2 \cdot 2,72 = 5,44 \text{ V}$$



EXERCICE 4.16 :

Définissons et orientons les courants de mailles conformément à la figure ci-dessous :



Les équations de mailles s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \text{maille 1 : } & 2 Ri_1 - Ri_2 = e \\ \text{maille 2 : } & - Ri_1 + 3 Ri_2 - Ri_3 = -u \\ \text{maille 3 : } & - Ri_2 + 2 Ri_3 = u + e \end{aligned}$$

On élimine la f.é.m. u de la source contrôlée dans les équations de mailles 2 et 3 en la remplaçant par sa valeur $u = Ri_2$:

$$\begin{aligned} \text{maille 1 : } & 2 Ri_1 - Ri_2 = e \\ \text{maille 2 : } & - Ri_1 + 4 Ri_2 - Ri_3 = 0 \\ \text{maille 3 : } & - 2 Ri_2 + 2 Ri_3 = e \end{aligned}$$

Le déterminant de ce système a pour valeur :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2R & -R & 0 \\ -R & 4R & -R \\ 0 & -2R & 2R \end{vmatrix} = 2R[8R^2 - 2R^2] + R[-2R^2] = 12R^3 - 2R^3 = 10R^3$$

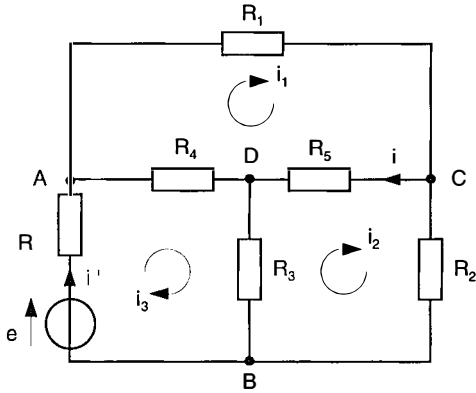
On en déduit :

$$i_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 2R & e & 0 \\ -R & 0 & -R \\ 0 & e & 2R \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} [2R(eR) + R(2eR)] = \frac{1}{\Delta} \cdot 4eR^2 = \frac{4e}{10R}$$

et : $u = 4e/10$.

EXERCICE 4.17 :

a) On peut choisir et orienter comme suit les trois mailles indépendantes du réseau. Le courant i' s'identifie alors au courant de maille i_3 et le courant i à $i_1 - i_2$.



Explicitons le système d'équations de mailles :

$$\text{maille 1 : } (R_1 + R_5 + R_4) i_1 - R_5 i_2 - R_4 i_3 = 0$$

$$\text{maille 2 : } -R_5 i_1 + (R_2 + R_3 + R_5) i_2 - R_3 i_3 = 0$$

$$\text{maille 3 : } -R_4 i_1 - R_3 i_2 + (R_3 + R_4 + R) i_3 = e$$

soit :

$$15 i_1 - 10 i_2 - 4 i_3 = 0$$

$$-10 i_1 + 15 i_2 - 3 i_3 = 0$$

$$-4 i_1 - 3 i_2 + 15 i_3 = e$$

On en déduit :

$$i_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -10 & -4 \\ 0 & 15 & -3 \\ e & -3 & 15 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{90e}{\Delta}$$

$$i_2 = \frac{\begin{vmatrix} 15 & 0 & -4 \\ -10 & 0 & -3 \\ -4 & e & 15 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{85e}{\Delta}$$

$$i_3 = \frac{\begin{vmatrix} 15 & -10 & 0 \\ -10 & 15 & 0 \\ -4 & -3 & e \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{125e}{\Delta}$$

avec :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 15 & -10 & -4 \\ -10 & 15 & -3 \\ -4 & -3 & 15 \end{vmatrix} = 15 \begin{vmatrix} 15 & -3 \\ -3 & 15 \end{vmatrix} + 10 \begin{vmatrix} -10 & -4 \\ -3 & 15 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -10 & -4 \\ 15 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 3240 - 1620 - 360 = 1260$$

soit :

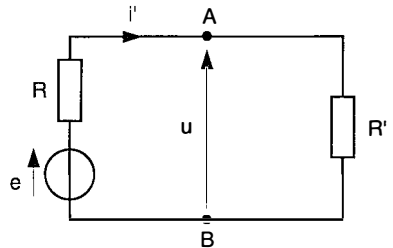
$$i' = i_3 = 25 \text{ e}/252 \text{ et } i = i_1 - i_2 = \text{e}/252$$

b) La résistance équivalente au dipôle AB, vue par le générateur de tension est déterminée par la loi d'Ohm :

$$u_{AB} = u_A - u_B = e - Ri' = R' i'$$

soit :

$$R' = e/i' - R = 252/25 - 8 = 2,08 \text{ k } \Omega.$$



c) La puissance reçue par la résistance R_5 a pour valeur $p = R_5 i^2$. Les flèches associées à u_{AB} et à i' sont de même sens : le produit de ces deux grandeurs représente donc la puissance p' fournie par le générateur :

$$p' = u_{AB} i' = R' i'^2$$

On en déduit le rapport : $p/p' = R_5/R' \cdot (i/i')^2$ avec $i/i' = 1/25$

soit :

$$p/p' = 7,7 \cdot 10^{-3}.$$

EXERCICE 4.18 :

a) Nous avons ici un réseau à trois mailles indépendantes qui présente une particularité intéressante : l'un des courants de mailles (i_1) est imposé par la source de courant. Il suffit donc d'écrire les équations des deux mailles restantes puisqu'il n'y a que deux inconnues (i_2 et i_3) :

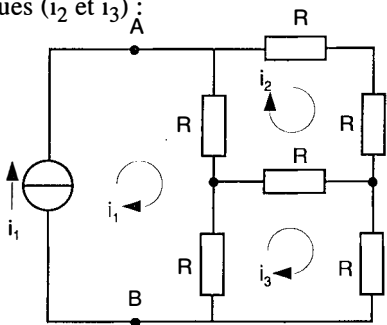
$$\text{maille 2 : } -Ri_1 + 4Ri_2 - Ri_3 = 0$$

$$\text{maille 3 : } -Ri_1 - Ri_2 + 3Ri_3 = 0$$

soit :

$$4i_2 - i_3 = 11$$

$$-i_2 + 3i_3 = 11$$



On en déduit :

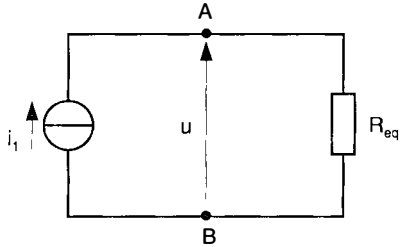
$$i_3 = 5 \text{ mA et } i_2 = 4 \text{ mA}$$

b) Désignons par R_{eq} la résistance équivalente au réseau entre les bornes A et B de la source de courant. La loi d'Ohm relie cette résistance à la tension $u_A - u_B$ et au courant i_1 :

$$\begin{aligned} u_A - u_B &= R_{\text{eq}} i_1 \\ u_A - u_B &= R(i_1 - i_2) + R(i_1 - i_3) \\ &= R(2i_1 - i_2 - i_3) \end{aligned}$$

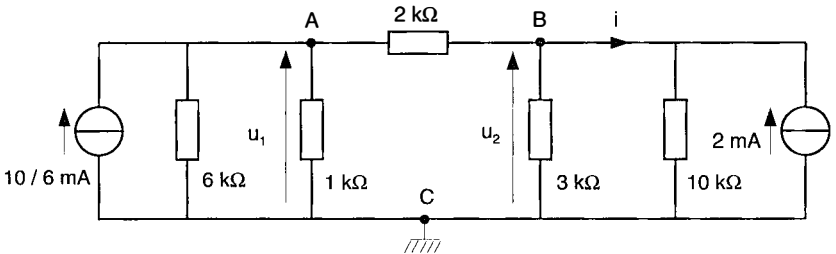
soit numériquement :

$$\begin{aligned} R_{\text{eq}} &= R(2 - 4/11 - 5/11) \\ &= 13R/11 = 1,18 \text{ k}\Omega. \end{aligned}$$



EXERCICE 4.19 :

Pour résoudre ce réseau par la méthode des nœuds, commençons par remplacer les deux générateurs de tension par les générateurs de courant équivalents :



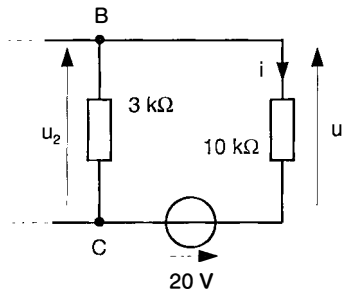
Choisissons C comme nœud de référence. Attribuons respectivement aux nœuds A et B les numéros 1 et 2 ; désignons par u_1 et u_2 leurs potentiels. Le système d'équations de nœuds s'écrit alors :

$$\text{nœud 1 : } u_1 (1/6 + 1 + 1/2) - u_2 (1/2) = 10/6$$

$$\text{nœud 2 : } -u_1 (1/2) + u_2 (1/2 + 1/3 + 1/10) = 2$$

On en déduit : $u_2 = 150/47 \text{ V}$.

On calcule ensuite u et i en revenant au réseau initial :



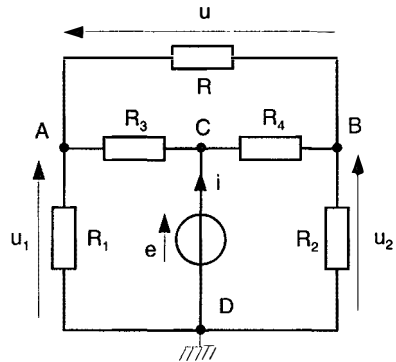
$$u = u_2 - 20 = (150 - 940)/47 = -790/47 = -16,8\text{V}$$

$$i = u/10 = -1,68\text{ mA}$$

EXERCICE 4.20 :

a) Dans ce réseau à trois mailles indépendantes, la d.d.p. entre les nœuds C et D est imposée par la source de tension. De ce fait, son analyse par la méthode des nœuds ne met en œuvre que deux inconnues, au lieu de trois pour la méthode des mailles.

Pour appliquer cette méthode, choisissons D comme nœud de référence, et explicitons le système d'équations de nœuds :



$$\text{nœud 1 (A) : } u_1 (1/R_1 + 1/R_3 + 1/R) - u_2/R - e/R_3 = 0$$

$$\text{nœud 2 (B) : } -u_1/R + u_2 (1/R_2 + 1/R_4 + 1/R) - e/R_4 = 0$$

b) numériquement :

$$\text{nœud 1 : } 14 u_1 - 10 u_2 = 3 e$$

$$\text{nœud 2 : } -10 u_1 + 16 u_2 = 4 e$$

On en déduit : $u_1 = 88 e/124 = 8,8\text{ V}$

$$u_2 = 86 e/124 = 8,6\text{ V}$$

1 - La d.d.p. $u = u_1 - u_2$ aux bornes de R vaut donc $0,2\text{ V}$.

2 - La puissance p fournie par la source de tension est le produit :

$$p = e i, \text{ avec } i = u_1/R_1 + u_2/R_2 = 8,8 + 17,2 = 26\text{ mA}$$

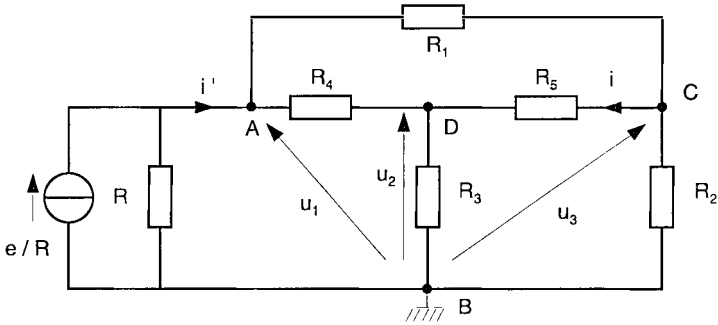
soit : $p = 12,4 \times 26 = 322\text{ mW}$.

3 - La résistance équivalente au réseau est le quotient :

$$R_{\text{eq}} = e/i = 12,4/26 = 0,477\text{ k}\Omega.$$

EXERCICE 4.21 :

Dans le réseau initial, on commence par remplacer le générateur de tension par le générateur de courant équivalent. On choisit le point B comme nœud de référence, et on désigne respectivement par u_1 , u_2 , u_3 , les potentiels des nœuds A, D, et C.



Le système d'équations de nœuds s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \text{nœud 1 (A)} : & u_1 (1/R + 1/R_1 + 1/R_4) - u_2/R_4 - u_3/R_1 = e/R \\ \text{nœud 2 (D)} : & -u_1/R_4 + u_2 (1/R_3 + 1/R_4 + 1/R_5) - u_3/R_5 = 0 \\ \text{nœud 3 (C)} : & -u_1/R_1 - u_2/R_5 + u_3 (1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_5) = 0 \end{aligned}$$

soit :

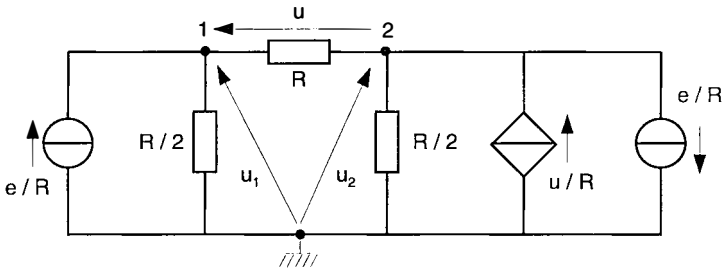
$$\begin{aligned} 1,375 u_1 - 0,25 u_2 - u_3 &= 0,125 e \\ -0,25 u_1 + 0,68 u_2 - 0,1 u_3 &= 0 \\ -u_1 - 0,1 u_2 + 1,6 u_3 &= 0 \end{aligned}$$

On déduit de ce système les valeurs des potentiels inconnus u_1 , u_2 , u_3 , puis :

$$i = \frac{u_3 - u_2}{R_5} \quad \text{et} \quad i' = \frac{e}{R} - \frac{u_1}{R}$$

EXERCICE 4.22 :

Commençons par remplacer les générateurs de tension par les générateurs de courant équivalents. Remplaçons d'autre part les associations $(R//R)$ par $R/2$.



Les équations de nœuds s'écrivent :

nœud 1 :

$$\left(\frac{1}{R} + \frac{2}{R}\right)u_1 - \frac{u_2}{R} = \frac{e}{R} \quad (1)$$

nœud 2 :

$$-\frac{u_1}{R} + \left(\frac{1}{R} + \frac{2}{R}\right)u_2 = \frac{u}{R} - \frac{e}{R} \quad (2)$$

Éliminons $u = u_1 - u_2$ dans (2). On obtient alors :

$$\begin{aligned} 3u_1 - u_2 &= e \\ -2u_1 + 4u_2 &= -e \end{aligned}$$

Le déterminant de ce système est :

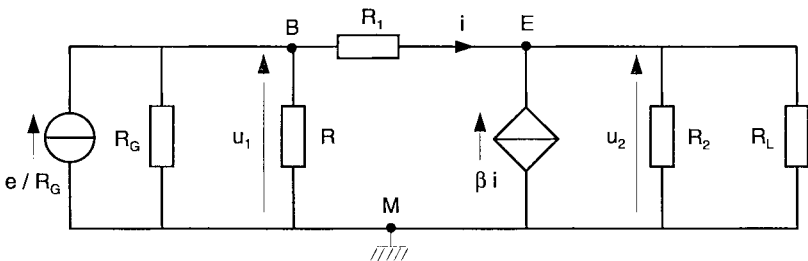
$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} e & -1 \\ -e & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} [4e - e] = 3e \cdot \frac{1}{10} = \frac{3e}{10} \\ u_2 &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 3 & e \\ -2 & -e \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} [-3e + 2e] = -e \cdot \frac{1}{10} = -\frac{e}{10} \end{aligned}$$

et :

$$u = u_1 - u_2 = 4e/10.$$

EXERCICE 4.23 :a) Remplaçons l'association série (e, R_G) par l'association parallèle équivalente $(e/R_G // R_G)$:

Le système d'équations de nœuds s'écrit ici :

$$\text{nœud 1 (B)} : u_1 (1/R_G + 1/R_1 + 1/R) - u_2/R_1 = e/R_G$$

$$\text{nœud 2 (E)} : -u_1/R_1 + u_2 (1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_L) = \beta i$$

avec : $R_1 i = u_1 - u_2$

soit, pour la deuxième relation :

$$-u_1/R_1 + u_2 (1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_L) = \beta u_1/R_1 - \beta u_2/R_1$$

ou encore :

$$-u_1 \frac{\beta+1}{R_1} + u_2 \left[\frac{\beta+1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_L} \right] = 0$$

b) Ces deux équations de nœuds s'écrivent numériquement :

$$2 u_1 - u_2 = 0,5 e$$

$$-26 u_1 + 31,25 u_2 = 0$$

On en déduit :

$$A = \frac{u_2}{u_1} = 0,832 \quad (\text{sans dimension})$$

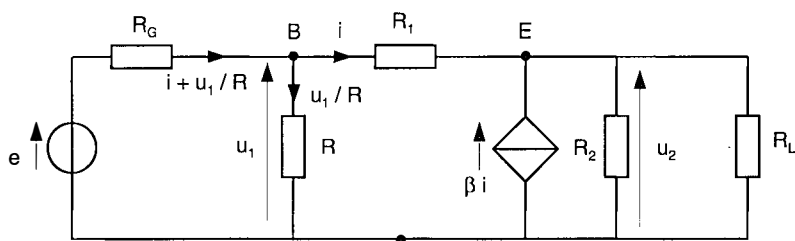
puis :

$$A' = \frac{u_2}{e} = \frac{0,5}{\frac{2}{A} - 1} = 0,356 \quad (\text{sans dimension})$$

$$A'' = \frac{u_1}{e} = \frac{0,5}{2 - A} = 0,428 \quad (\text{sans dimension})$$

$$Y = \frac{u_1 - u_2}{e} \cdot \frac{1}{R_1} = 0,072 \text{ mA} / \text{V}$$

c)



La puissance fournie par le générateur (e, R_G) est :

$$p' = u_1 \left[i + \frac{u_1}{R} \right]$$

La puissance reçue par la charge R_L est :

$$p = \frac{u_2^2}{R_L}$$

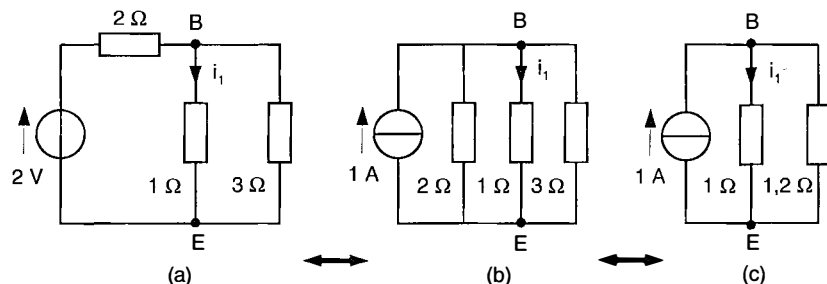
Le gain en puissance p/p' vaut donc :

$$G_p = \frac{1}{R_L} \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{u_2}{i + \frac{u_1}{R}} = \frac{A}{R_L} \cdot \frac{A'}{Y + \frac{A''}{R}} \cong 5,2$$

EXERCICE 4.24 :

L'intensité du courant qui circule dans la résistance de 1Ω résulte de la superposition de deux courants i_1 et i_2 .

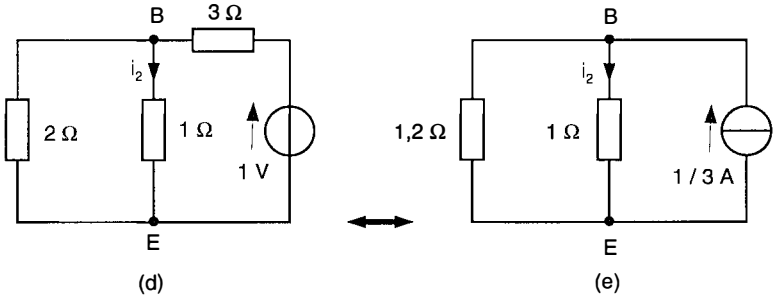
a) i_1 est calculé en neutralisant la source de tension de f.é.m. 1 V . On se ramène alors au réseau (a) ci-dessous, qu'il est judicieux de transformer successivement en (b) et (c) de manière à faire apparaître un diviseur de courant.



On en déduit immédiatement :

$$i_1 = 1 \cdot \frac{1,2}{1 + 1,2} = \frac{1,2}{2,2} = 0,55 \text{ A}$$

b) i_2 est calculé en neutralisant la source de tension de f.é.m. 2 V . On aboutit, par les mêmes transformations, au diviseur de courant (e).



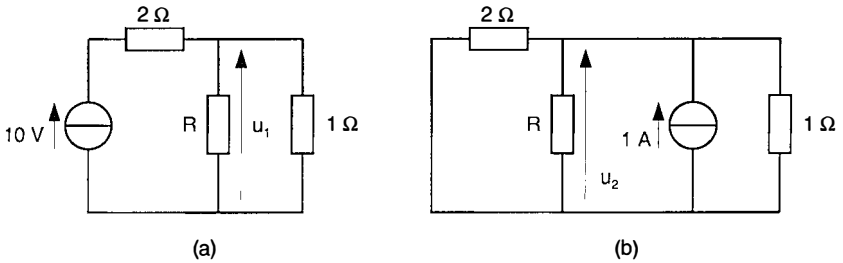
On en déduit :

$$i_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1,2}{2,2} = 0,18 \text{ A}$$

et : $i = i_1 + i_2 = 0,73 \text{ A}$, soit : $u = 0,73 \text{ V}$.

EXERCICE 4.25 :

La tension u est la somme des tensions u_1 et u_2 apparaissant aux bornes de R après neutralisation de la source de courant (a) et de la source de tension (b).



Le réseau (a) est un diviseur de tension :

$$u_1 = 10 \cdot \frac{(R // 1)}{2 + (R // 1)} = 10 \frac{R}{(R+1) \left[2 + \frac{R}{R+1} \right]} = \frac{10R}{R+2(R+1)} = \frac{10R}{3R+2}$$

Le réseau (b) est un circuit parallèle pour lequel :

$$u_2 = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{R} + \frac{1}{1}} = \frac{R}{1,5R+1}$$

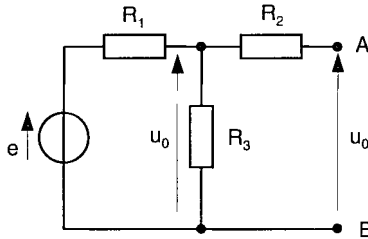
au total :

$$u = u_1 + u_2 = \frac{12R}{3R+2} = 2 \text{ V}$$

soit : $12R = 6R + 4$ et $R = \frac{4}{6} = 0,67\Omega$

EXERCICE 4.26 :

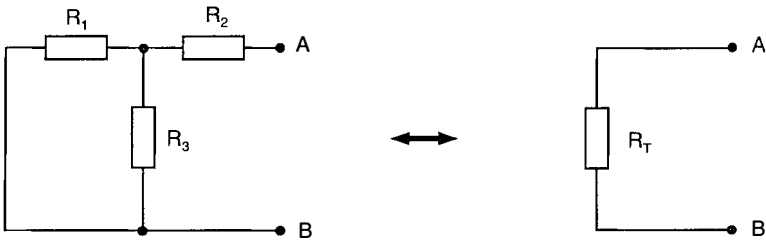
La f.é.m. e_T du générateur de Thévenin est la tension à vide u_0 entre les bornes A et B du dipôle.



La résistance R_2 n'étant parcourue par aucun courant, la tension aux bornes de R_3 est égale à u_0 . Par application de la relation du diviseur de tension, on obtient alors :

$$e_T = u_0 = e \frac{R_3}{R_1 + R_3}$$

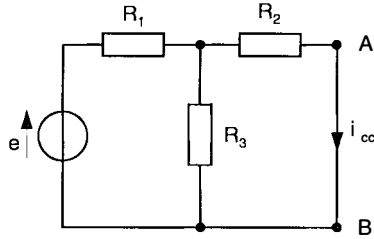
La résistance interne R_T du générateur de Thévenin se calcule en neutralisant la source de tension . Cette opération se réalise en pratique en supprimant le cercle qui la matérialise.



On obtient alors :

$$R_T = R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}$$

Le débit η_N du générateur de Norton est le courant i_{cc} qui circule de A vers B dans un court-circuit reliant ces deux bornes :



On peut calculer ce courant de plusieurs manières :

a) en effectuant le quotient :

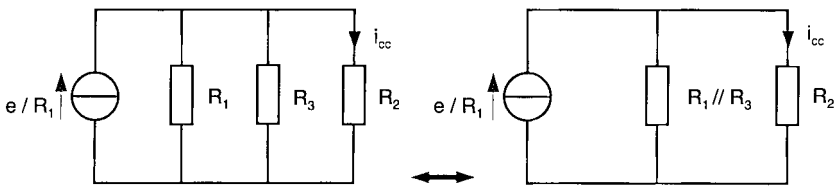
$$\eta_N = \frac{e_T}{R_T} = e \frac{R_3}{R_1 + R_3} \cdot \frac{1}{R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}} = \frac{e R_3}{R_1 R_3 + R_2 (R_1 + R_3)}$$

b) en calculant la tension u aux bornes de R_3 par application de la relation des diviseurs de tension, et en effectuant le quotient $i_{cc} = u/R_2$:

$$u = e \frac{(R_2 // R_3)}{R_1 + (R_2 // R_3)} = e \frac{R_2 R_3}{R_1 (R_2 + R_3) + R_2 R_3}$$

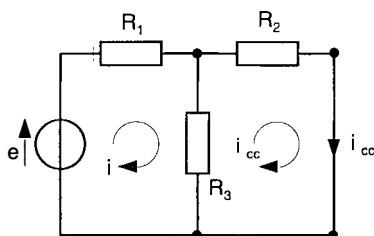
$$\text{et : } \eta_N = i_{cc} = \frac{u}{R_2} = \frac{e R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

c) en remplaçant le générateur de tension (e, R_1) par le générateur de courant équivalent ($e/R_1 // R_1$) et en appliquant la relation du diviseur de courant :



$$\begin{aligned} i_{cc} &= \frac{e}{R_1} \cdot \frac{R_1 // R_3}{R_2 + (R_1 // R_3)} \\ &= \frac{e R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \end{aligned}$$

d) par application de la méthode des mailles :



$$\text{maille de gauche : } (R_1 + R_3) i - R_3 i_{cc} = e$$

$$\text{maille de droite : } -R_3 i + (R_2 + R_3) i_{cc} = 0$$

soit :

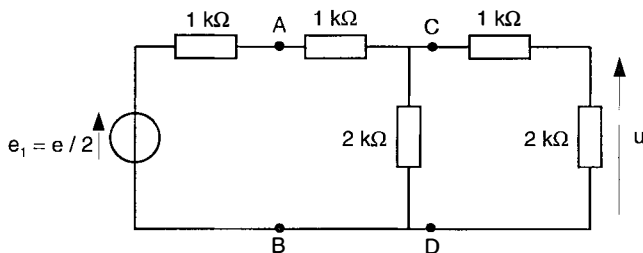
$$i_{cc} = \frac{\begin{vmatrix} R_1 + R_3 & e \\ -R_3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{vmatrix}} = \frac{eR_3}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_3) - R_3^2}$$

$$= \frac{eR_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

EXERCICE 4.27 :

Le diviseur de tension à gauche de A et B peut être remplacé par le générateur de tension :

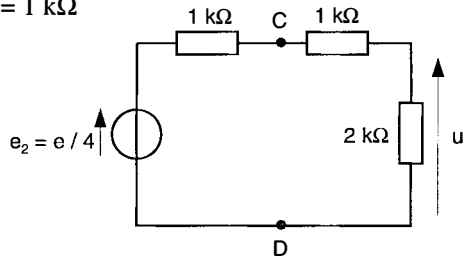
- de f.é.m. $e_1 = e \frac{2}{2+2} = \frac{e}{2} = 4\text{V}$
- de résistance interne $R_1 = 2//2 = 1\text{ k}\Omega$



Le diviseur de tension à gauche de C et D peut être remplacé par le générateur de tension :

- de f.é.m. $e_2 = e_1 \cdot \frac{2}{4} = \frac{e_1}{2} = 2\text{V}$

- de résistance interne $R_2 = 2/2 = 1 \text{ k}\Omega$



On se ramène finalement à un diviseur de tension pour le calcul de u :

$$u = e_2 \frac{2}{2+2} = \frac{e_2}{2} = \frac{e}{8} = 1 \text{ V}$$

EXERCICE 4.28 :

Pour calculer la f.é.m. e_T du générateur de Thévenin équivalent au réseau, vu de la charge de 1Ω , on déconnecte la charge.

Désignons par i' le courant qui circule dans la maille ainsi formée, par exemple dans le sens des aiguilles d'une montre. Si on oriente cette maille dans le même sens, la deuxième loi de Kirchhoff s'écrit :

$$(2 + 3)i' = 2 - 1, \text{ soit : } i' = 1/5 \text{ A}$$

On peut calculer $u_0 = e_T$ en décomposant cette tension en :

$$u_0 = (u_B - u_A) + (u_A - u_D) = -2/5 + 2 = 1,6 \text{ V}$$

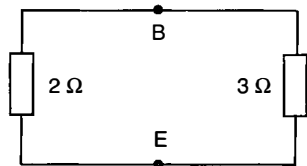
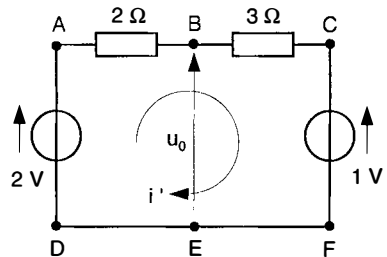
ou bien :

$$u_0 = (u_B - u_C) + (u_C - u_A)$$

ce qui conduit au même résultat.

Pour calculer la résistance interne du générateur de Thévenin, on neutralise les deux sources de tension.

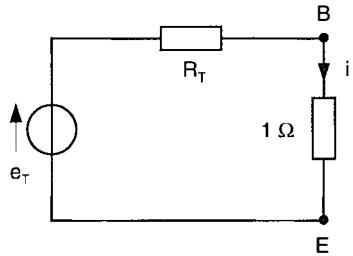
On en déduit : $R_T = 2/3 = 1,2 \Omega$.



On peut maintenant remplacer le réseau initial par le réseau ci-contre :

Le courant i qui circule de B vers E dans la résistance de $1\ \Omega$ vaut :

$$i = \frac{e_T}{R_T + 1} = \frac{1,6}{2,2} = 0,73\ \text{A}$$

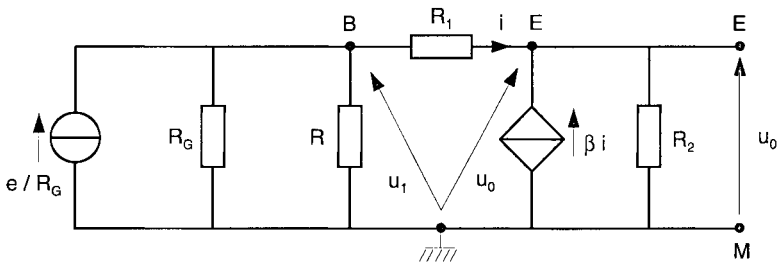


On en déduit : $u = 0,73\ \text{V}$.

EXERCICE 4.29 :

a) La tension à vide u_0 représente la f.é.m. e_T du générateur de Thévenin équivalent au réseau, vu des bornes M et E. On peut la calculer de plusieurs manières :

- par la méthode des nœuds, en remplaçant le générateur de tension (e, R_G) par le générateur de courant équivalent ($e/R_G/R_G$).



Dans ce circuit à trois nœuds B, E, M, le système d'équations s'explique comme suit :

$$\text{nœud B : } \left[\frac{1}{R_G} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right] u_1 - \frac{u_0}{R_1} = \frac{e}{R_G}$$

$$\text{nœud E : } -\frac{u_1}{R_1} + \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] u_0 = \beta i$$

avec : $i = \frac{u_1 - u_0}{R_1}$

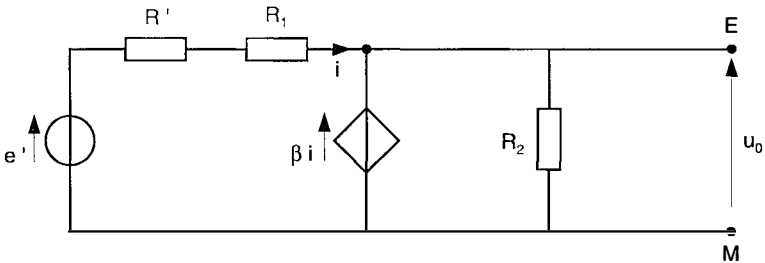
soit en E : $-\frac{u_1}{R_1} + \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] u_0 = \frac{\beta}{R_1} u_1 - \frac{\beta}{R_1} u_0$

$$\text{et : } -\frac{\beta+1}{R_1} u_1 + \left[\frac{\beta+1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] u_0 = 0$$

$$\text{On en déduit : } u_0 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_G} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} & \frac{e}{R_G} \\ -\frac{\beta+1}{R_1} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_G} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{\beta+1}{R_1} & \frac{\beta+1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \end{vmatrix}}$$

$$\text{soit numériquement : } u_0 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & e \\ -26 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -26 & \frac{105}{4} \end{vmatrix}} = \frac{26e}{53}$$

- en remplaçant le diviseur de tension constitué par la source de f.é.m. e et les résistances R_G , R par son équivalent de Thévenin (e' , R') :



$$e' = e R / (R + R_G) = e/2$$

$$R' = R/R_G = 1 \text{ k}\Omega$$

La tension aux bornes de R_2 est donnée par la loi d'Ohm :

$$u_0 = R_2 (\beta + 1) i = 104i$$

Par ailleurs : $e' - u_0 = (R' + R_1) i = e/2 - u_0$

soit : $i = e/4 - u_0/2$

On en déduit :

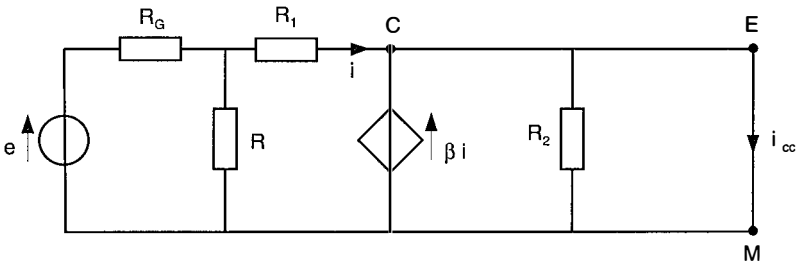
$$u_0 = 104 [e/4 - u_0/2]$$

$$u_0 106/2 = 104 e/4$$

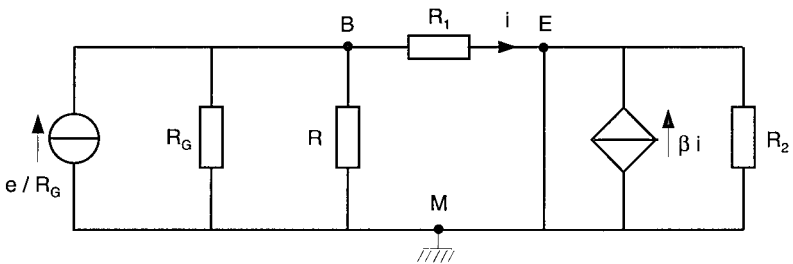
et : $u_0 = 26/53 e$

b) Lorsqu'on relie les bornes E et M par un court-circuit, la tension aux bornes de R_2 devient nulle : cette résistance n'est donc parcourue par aucun courant. Par application de la loi des nœuds en E, on établit que :

$$i_{cc} = i + \beta i = (\beta + 1) i = 26i$$



Pour exprimer i en fonction de e , on peut remplacer le générateur de tension (e, R_G) par le générateur de courant équivalent.



i est alors donné par la relation du diviseur de courant :

$$i = \frac{e}{R_G} \cdot \frac{1/R_1}{1/R_1 + 1/R_G + 1/R} = \frac{e}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{e}{4}$$

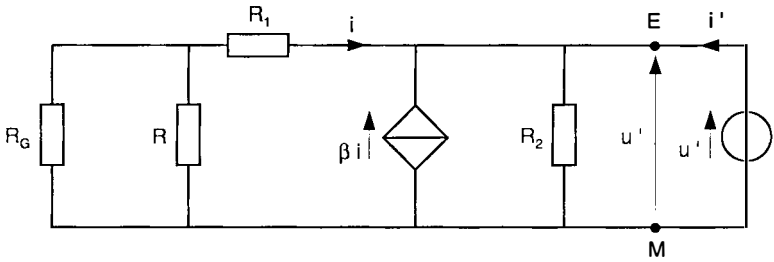
en définitive : $i_{cc} = 26i = 13/2 e$

C'est le débit du générateur de Norton équivalent au réseau, à gauche de E et M.

c) La résistance interne du générateur de Thévenin est le quotient :

$$R_T = u_0/i_{cc} = 26/53 \cdot 2/13 = 4/53 = 0,075 \text{ k}\Omega.$$

d) On peut calculer directement R_T en neutralisant la source de tension indépendante et en maintenant la source de courant contrôlée.



Désignons par i' le courant qui pénètre par la borne E lorsqu'on applique une tension $u' = u_E - u_M$. La loi des nœuds s'écrit alors en E :

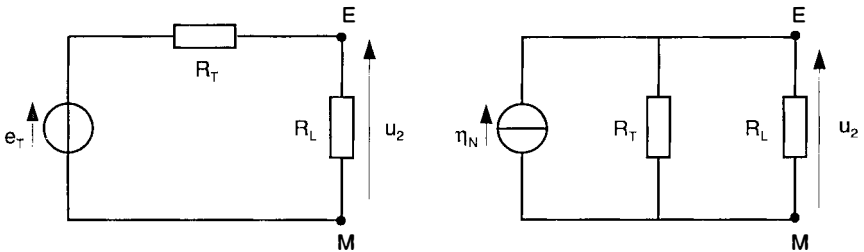
$$(\beta + 1) i + i' = u' / R_2$$

avec : $u' = - [R_1 + (R // R_G)] i$

$$\text{On en déduit : } i' = u' \left[\frac{1}{R_2} + \frac{\beta + 1}{R_1 + (R // R_G)} \right]$$

et : $r_s = R_T = u' / i' = 4 / 53 = 0,075 \text{ k}\Omega$

e) Le réseau connecté à la charge R_L peut être remplacé par ses équivalents de Thévenin ou de Norton :



Dans le premier cas, on a un diviseur de tension :

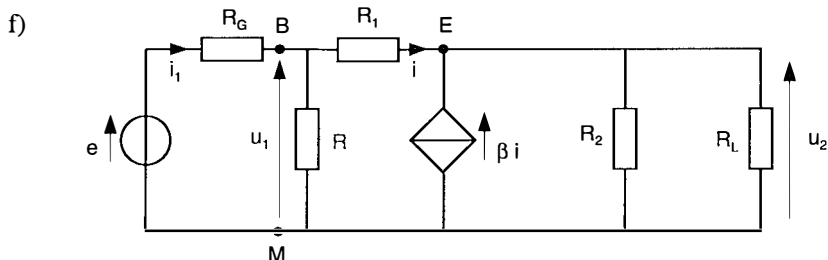
$$u_2 = e_T \frac{R_L}{R_L + R_T} = \frac{26e}{53} \cdot \frac{0,2}{0,275}$$

soit : $A = \frac{u_2}{e} = 0,356 e$

Dans le second cas :

$$u_2 = \eta_N (R_T // R_L) = \eta_N \frac{R_T R_L}{R_T + R_L}$$

Cette dernière expression conduit au même résultat numérique que la première.



Désignons par u_1 la tension entre les bornes d'entrée B et M du montage lorsqu'il est relié au générateur (e, R_G) et par i_1 le courant qui pénètre alors par la borne B. La résistance d'entrée du montage est par définition le quotient :

$$r_e = u_1 / i_1$$

La loi des mailles nous permet d'écrire :

$$u_1 = R_1 i + u_2 = R_1 i + (R_2 // R_L)(\beta + 1) i$$

d'où :

$$\frac{u_1}{i} = R_1 + (\beta + 1)(R_2 // R_L) = 1 + 4,95 = 5,95 \text{ k}\Omega$$

Ecrivons maintenant la loi des nœuds en B :

$$i_1 = \frac{u_1}{R} + i$$

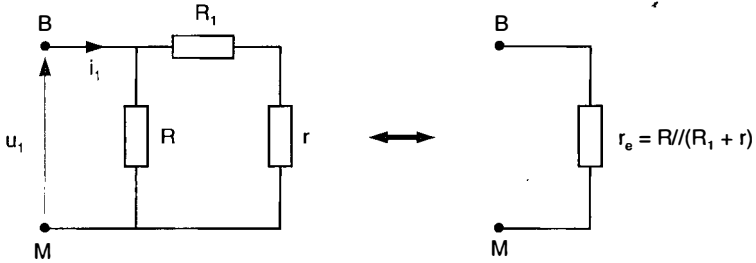
$$\begin{aligned} \text{d'où : } \frac{i_1}{u_1} &= \frac{1}{R} + \frac{i}{u_1} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1 + (\beta + 1)(R_2 // R_L)} \\ &= 0,5 + 0,168 = 0,668 \quad (\text{k}\Omega^{-1}) \end{aligned}$$

Ceci étant la conductance d'entrée $\left(\frac{1}{r_e}\right)$, on en déduit facilement :

$$\frac{u_1}{i_1} = r_e = 1,5 \text{ k}\Omega$$

Remarque 1 :

Le déroulement du calcul permet de reconstituer la résistance d'entrée r_e sous la forme du dipôle équivalent représenté ci-après :



Dans ce schéma, apparaissent les deux résistors R et R_1 , physiquement identifiables en tant que composants du montage, associés à une résistance purement “dynamique” $r = (\beta + 1)(R_2 // R_L)$ dont la valeur est fonction du coefficient β .

Ce type d’observation peut être généralisé aux circuits comportant des sources liées, c’est-à-dire en pratique aux circuits électroniques construits autour de composants actifs, tels les transistors.

En se reportant au résultat de la question (d), on pourra constater qu’il en est de même pour la résistance de sortie qui fait apparaître, elle aussi, un terme purement dynamique associé à un résistor :

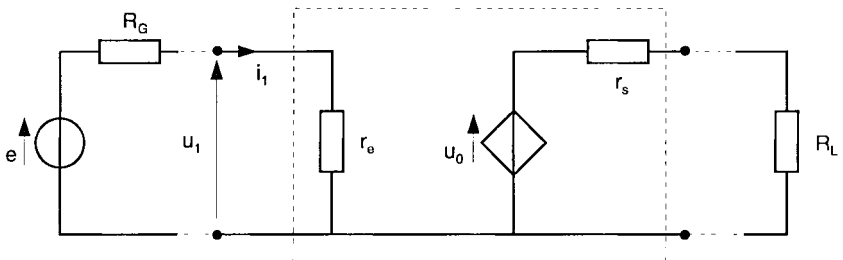
$$r_s = R_2 // \frac{R_1 + (R // R_G)}{\beta + 1}$$

On gardera donc à l’esprit que la résistance de sortie (résistance interne du générateur de Thévenin équivalent vu par la charge), tout comme la résistance d’entrée (équivalente au montage vu par le générateur d’excitation), sont des “paramètres résistifs”, mais non de simples résistors.

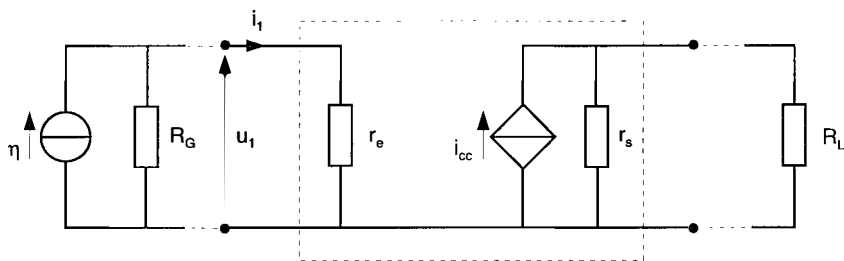
Remarque 2 :

Au total, un montage électronique, éventuellement très compliqué, utilisé en régime linéaire, pourra le plus souvent être schématisé sous l’une des formes suivantes :

- en utilisant la représentation de Thévenin, avec $u_0 = Au_1$



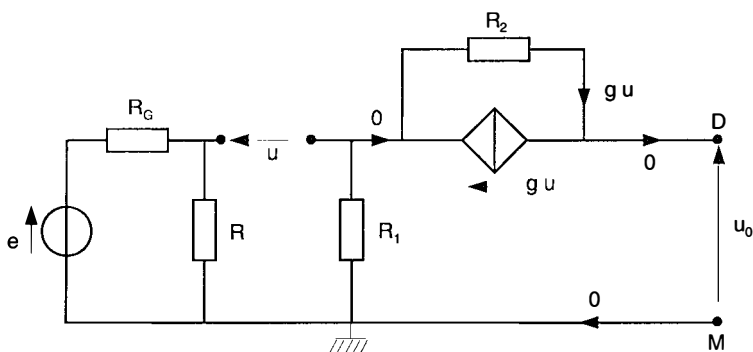
- en utilisant la représentation de Norton, avec $i_{cc} = A' i_1$



Ces deux représentations sont bien sûr équivalentes et permettent de calculer très commodément la réponse obtenue sur une charge R_L placée entre les bornes de sortie, lorsqu'un signal est injecté à l'entrée par un générateur d'excitation (e, R_G) ou $(\eta // R_G)$.

EXERCICE 4.30 :

- a) Pour déterminer la f.é.m. $e_T = f(e)$ du générateur de Thévenin équivalent au montage, on déconnecte la charge R_L :



Dans ces conditions, la résistance R_1 n'est parcourue par aucun courant, et la tension entre ses bornes est nulle. Il en résulte :

- que le courant délivré par la source contrôlée circule intégralement dans R_2 :

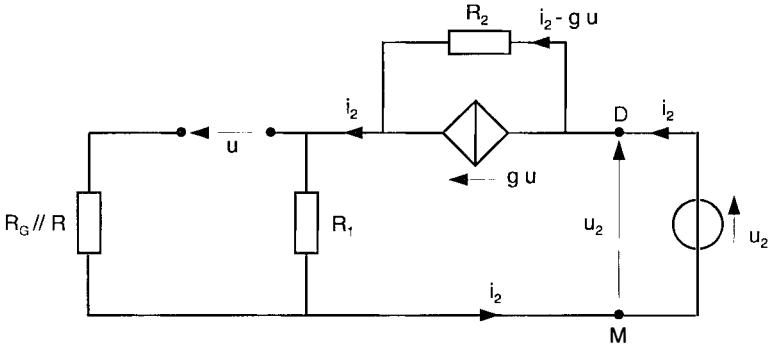
$$u_0 = -g u R_2 = -50u$$

- que u est la tension aux bornes de R :

$$u = e R / (R + R_G) = e/2$$

On en déduit : $e_T = u_0 = -25e$

Pour calculer la résistance interne du générateur de Thévenin, on neutralise la source de tension :



On applique une tension u_2 entre les bornes D et M, et on désigne par i_2 le courant qui pénètre alors par la borne D.

Par application de la loi des nœuds, on établit que les courants circulant dans R_1 et R_2 sont respectivement i_2 et $i_2 - g u$, de sorte que :

$$u_2 = R_2(i_2 - g u) + R_1 i_2$$

avec : $u = -R_1 i_2$

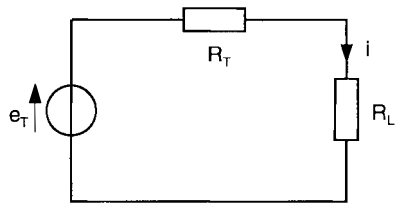
On en déduit : $u_2 = i_2 [R_1 + R_2 (1 + g R_1)]$

$$\text{et : } R_T = \frac{u_2}{i_2} = 20,2 \text{ k}\Omega$$

b) Le courant traversant la charge R_L est obtenu en remplaçant le réseau initial par son équivalent de Thévenin :

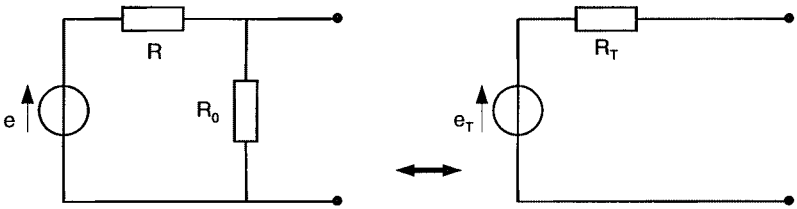
$$i = \frac{e_T}{R_L + R_T} = \frac{-25e}{25} = -e$$

(valeur en mA quand e est exprimé en volts)



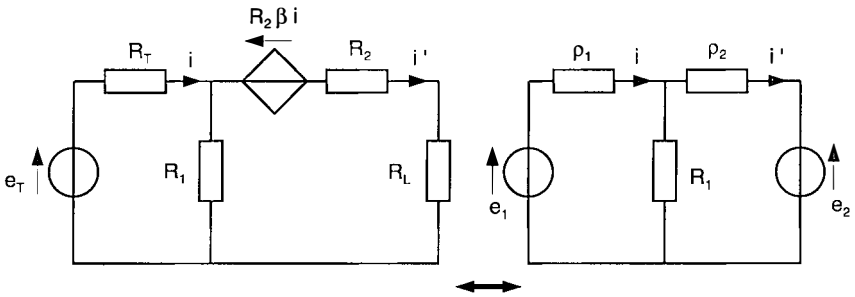
EXERCICE 4.31 :

a) Le diviseur de tension à gauche de R_1 peut être remplacé par son équivalent de Thévenin :



$$e_T = e \frac{R_0}{R + R_0} \quad R_T = R_0 // R = \frac{R R_0}{R + R_0}$$

L'association $\beta i // R_2$ peut être remplacée par l'association série $(R_2 \beta i, R_2)$.



Le réseau initial ainsi transformé peut être identifié au réseau B :

$$e_1 = e_T = \frac{R_0 e}{R + R_0} = 0,5 e \quad e_2 = R_2 \beta i = 320 i$$

$$\rho_1 = R_T = \frac{R R_0}{R + R_0} = 1 \text{ k}\Omega \quad \rho_2 = R_2 + R_L = 10 \text{ k}\Omega$$

b) Les équations de mailles correspondant à la figure ci-dessus s'écrivent :

$$\begin{aligned} \text{maille 1 : } & (\rho_1 + R_1) i - R_1 i' = e_1 \\ \text{maille 2 : } & -R_1 i + (\rho_2 + R_1) i' = -e_2 = -R_2 \beta i \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} (\rho_1 + R_1) i - R_1 i' &= e_1 \\ (R_2 \beta - R_1) i + (\rho_2 + R_1) i' &= 0 \end{aligned}$$

c) Ce système d'équations s'écrit numériquement :

$$\begin{aligned} 1,2 i - 0,2 i' &= 0,5 e \\ 319,8 i + 10,2 i' &= 0 \end{aligned}$$

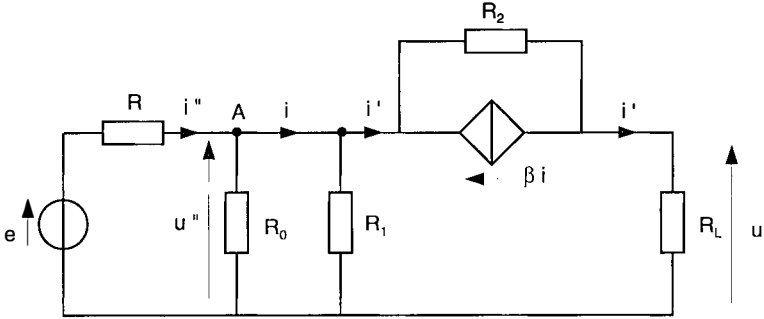
On en déduit $i = e/14,9$; $i' = -e/0,48$; $u = R_L i' = -4,2 e$

d) La charge R_L , parcourue par un courant d'intensité i' , absorbe une puissance :

$$p = R_L i'^2 = 8,68 e^2$$

La puissance fournie par le générateur de tension est le produit $p' = u'' i''$, avec :

$$u'' = e - R i'' = R_0 (i'' - i) = R_1 (i - i')$$



Des deux dernières relations, on tire :

$$i'' = i + [R_1 (i - i')] / R_0 = 0,284 e$$

On en déduit : $p' = u'' i'' = (e - R i'') i'' = 0,123 e^2$

et : $G_p = p/p' = 71$

EXERCICE 4.32 :

a) Au nœud B : $\frac{u - e}{R} + u / R_2 = -\beta i$

b) Pour calculer le gain $A = u/e$, il faut éliminer i :

$$i = e/R_1$$

On obtient alors : $\frac{u}{R} - \frac{e}{R} + \frac{u}{R_2} = -\beta \frac{e}{R_1}$

soit :

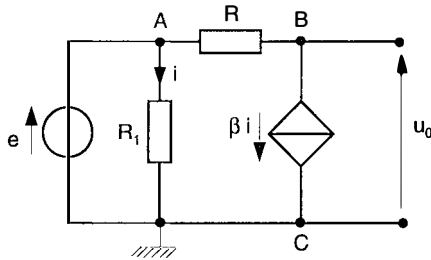
$$e \left[\frac{1}{R} - \frac{\beta}{R_1} \right] = u \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{R_2} \right]$$

$$e \frac{R_1 - R\beta}{R R_1} = u \frac{R + R_2}{R R_2}$$

et :

$$A = \frac{(R_1 - \beta R) R_2}{R_1 (R + R_2)} = \frac{1 - \beta R / R_1}{1 + R / R_2}$$

c) La résistance R est traversée de A vers B par le courant βi .



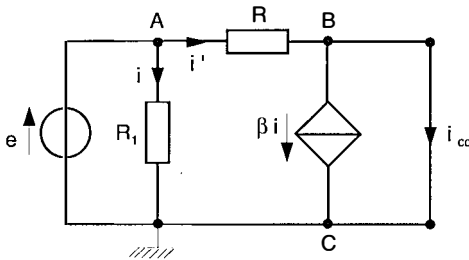
La tension u_0 vaut alors :

$$u_0 = e - R \beta i, \text{ avec : } i = e/R_1$$

soit : $u_0 = e (1 - \beta R/R_1)$

d) Les bornes B et C sont au même potentiel zéro. Il en résulte :

$$i' = \frac{e - 0}{R}$$



La loi des nœuds s'écrit alors en B :

$$i_{cc} = i' - \beta i$$

avec : $i = e/R_1$.

On en déduit : $i_{cc} = e/R - \beta e/R_1 = e (1/R - \beta/R_1)$

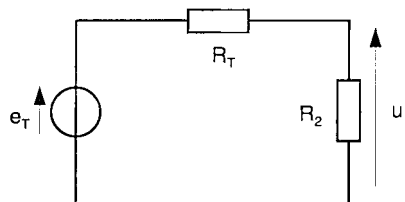
e) La résistance interne du générateur de Thévenin est le quotient :

$$R_T = e_T / \eta_N = u_0 / i_{cc} = \frac{e(R_1 - \beta R)R R_1}{R_1 e(R_1 - \beta R)} = R$$

f) La tension u aux bornes de R_2 a pour expression :

$$u = e_T \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_T}$$

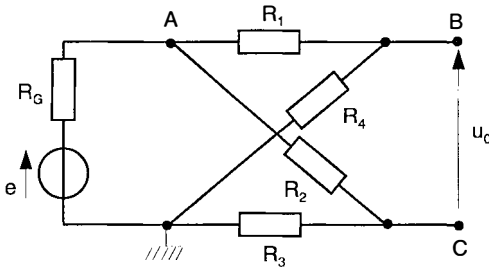
On en déduit :



$$\frac{u}{e} = \frac{R_1 - \beta R}{R_1} \cdot \frac{R_2}{R + R_2}$$

EXERCICE 4.33 :

a) La f.é.m. e_T du générateur de Thévenin est la tension à vide $u_0 = u_B - u_C$ lorsque la charge R est déconnectée.



On peut exprimer les potentiels u_B et u_C en fonction de u_A en utilisant la relation des diviseurs de tension :

$$u_B = u_A \frac{R_4}{R_4 + R_1}$$

$$u_C = u_A \frac{R_3}{R_3 + R_2}$$

On trouve alors :

$$\begin{aligned} u_0 = u_B - u_C &= u_A \left[\frac{R_4}{R_4 + R_1} - \frac{R_3}{R_3 + R_2} \right] \\ &= u_A \left[\frac{4}{5} - \frac{3}{5} \right] = u_A / 5 \end{aligned}$$

On peut exprimer ensuite u_A en fonction de e en faisant apparaître un troisième diviseur de tension ; u_A est la tension aux bornes de l'ensemble :

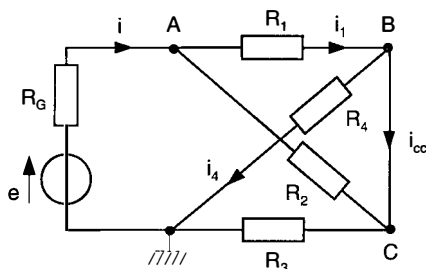
$$(R_1 + R_4) // (R_3 + R_2)$$

On a donc :

$$u_A = e \frac{(R_1 + R_4) // (R_3 + R_2)}{R_G + (R_1 + R_4) // (R_3 + R_2)} = e \frac{2,5}{2,5 + 2,5} = \frac{e}{2}$$

Au total : $e_T = u_0 = e/10 = 1 \text{ V}$

Le débit η_N du générateur de Norton est le courant de court-circuit qui circule de B vers C.



Les résistances en parallèle R_1 et R_2 constituent un diviseur de courant :

$$i_1 = i \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Il en est de même des résistances en parallèle R_4 et R_3 :

$$i_4 = i \frac{R_3}{R_3 + R_4}$$

D'après la loi des nœuds écrite en B, le courant i_{cc} a pour valeur :

$$i_{cc} = i_1 - i_4 = i \left[\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right] = i \left[\frac{2}{3} - \frac{3}{7} \right] = \frac{5i}{21}$$

Par ailleurs, le générateur (e , R_G) étant chargé par l'ensemble $R_1 // R_2$ en série avec $R_4 // R_3$, on a :

$$i = \frac{e}{R_G + (R_1 // R_2) + (R_4 // R_3)} = \frac{e}{2,5 + \frac{2}{3} + \frac{12}{7}} = \frac{21e}{102,5}$$

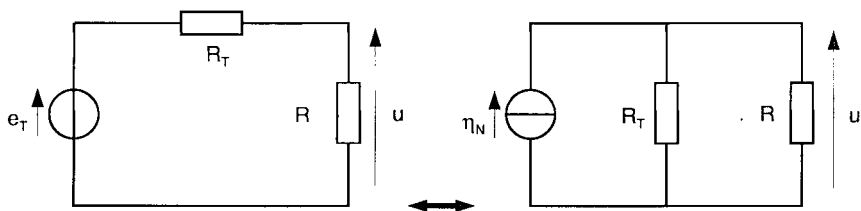
On en déduit :

$$\eta_N = i_{cc} = \frac{5e}{102,5} \cong 0,49 \text{ mA}$$

La résistance interne du générateur de Thévenin est le quotient :

$$R_T = u_0 / i_{cc} = \frac{102,5}{50} = 2,05 \text{ k}\Omega$$

b) La tension u aux bornes de la charge résistive a pour valeur :



$$u = e_T R / (R + R_T) = 0,18 \text{ V}$$

$$\text{ou : } u = \eta_N (R // R_T) = 0,18 \text{ V}$$

EXERCICE 4.34 :

Le théorème de Millman fournit directement l'équivalent de Thévenin (e_T , R_T) de l'association parallèle des générateurs (e_1 , R_1), et (e_2 , R_2) :

$$e_T = \frac{\frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{e_1 R_2 + e_2 R_1}{R_1 + R_2}$$

$$R_T = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

EXERCICE 4.35 :

a) La transformation étoile – triangle ou réseau en T – réseau en π est un cas particulier de transformation étoile – polygone. D'après le théorème de Kennely, on a ici :

$$G_{jk} = \frac{G_j \cdot G_k}{G_1 + G_2 + G_3}$$

soit, par exemple :

$$G_{12} = \frac{1}{R_{12}} = \frac{G_1 \cdot G_2}{G_1 + G_2 + G_3}$$

et :

$$R_{12} = \frac{1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3}{1/R_1 \cdot 1/R_2} = \frac{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2}{R_3}$$

Les expressions des autres résistances s'en déduisent par permutation circulaire :

$$R_{23} = \frac{R_3 R_1 + R_2 R_1 + R_2 R_3}{R_1}$$

$$R_{31} = \frac{R_1 R_2 + R_3 R_2 + R_3 R_1}{R_2}$$

En les additionnant membre à membre, on obtient :

$$R_{12} + R_{23} + R_{31} = [R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1] \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right]$$

$$= \frac{[R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3]^2}{R_1R_2R_3}$$

Par ailleurs :

$$R_{12} \cdot R_{13} = \frac{[R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3]^2}{R_3R_2}$$

de sorte que :

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

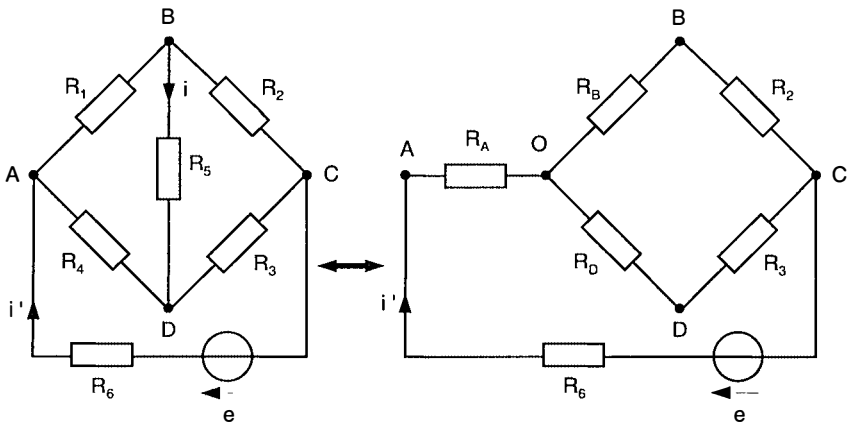
On déduit ensuite par permutation circulaire :

$$R_2 = \frac{R_{23}R_{21}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

$$R_3 = \frac{R_{31}R_{32}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

EXERCICE 4.36 :

a)



En utilisant les résultats de l'exercice précédent, on a :

$$R_A = \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4 + R_5} = \frac{1}{2,1} = 0,48 \text{ k}\Omega$$

$$R_B = \frac{R_1 R_5}{R_1 + R_4 + R_5} = \frac{0,1}{2,1} = 0,048 \text{ k}\Omega$$

$$R_D = \frac{R_4 R_5}{R_1 + R_4 + R_5} = \frac{0,1}{2,1} = 0,048 \text{ k}\Omega$$

b) Le courant i' que débite le générateur est $i' = e/R$, avec :

$$R = R_6 + R_A + (R_B + R_2) // (R_D + R_3)$$

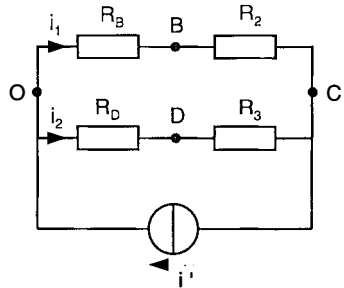
$$= 0,1 + 0,48 + 1,02 = 1,6 \text{ k}\Omega$$

$$\text{soit : } i' = \frac{10}{1,6} = 6,25 \text{ mA}$$

On peut calculer les courants i_1 et i_2 qui traversent R_2 et R_3 par la relation du diviseur de courant :

$$i_1 = i' \frac{R_D + R_3}{(R_D + R_3) + (R_B + R_2)} = \frac{i'}{2}$$

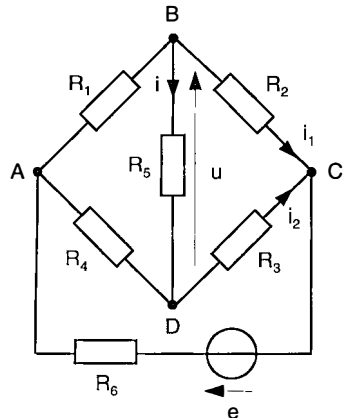
$$i_2 = i' \frac{R_B + R_2}{(R_D + R_3) + (R_B + R_2)} = \frac{i'}{2}$$



En revenant au réseau initial, on en déduit :

$$u = R_5 i = -R_3 i_2 + R_2 i_1 = 0 \text{ V}$$

$$\text{soit : } i = 0$$



Exercices sur le chapitre 5

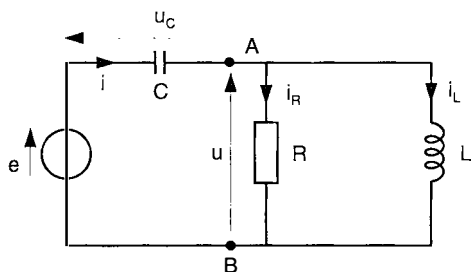
EXERCICE 5.1 :

D'après la loi des nœuds écrite en A, le courant débité par le générateur est la somme :

$$i = i_R + i_L$$

D'après la loi des mailles, on a d'autre part :

$$e = u + u_C$$



Pour déterminer la phase du courant i , on réalise une première construction de Fresnel à l'instant où le vecteur \vec{OU} associé à u est porté par l'axe Ox : les vecteurs \vec{OR} et \vec{RL} , de normes $I_R = U/R$ et $I_L = U/\omega L$, associés à i_R et i_L sont alors dirigés respectivement vers les $x > 0$ et les $y < 0$.

On construit ces deux vecteurs en choisissant arbitrairement la longueur de l'un d'entre eux : on peut prendre par exemple $OR = 20$ mm, et par conséquent :

$$RL = OR \frac{I_L}{I_R} = 20 \frac{R}{\omega L} = 20 \cdot 1,2 = 24 \text{ mm}$$

On détermine alors graphiquement l'angle $\varphi = 50^\circ$ qui mesure le retard de i par rapport à u . Ce résultat peut être vérifié par le calcul :

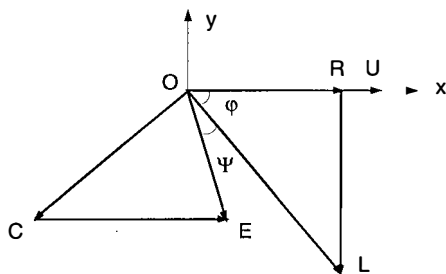
$$\varphi = \text{Arc tg} [I_L / I_R] = \text{Arc tg} [1,2]$$

La tension u_C , en retard de 90° sur le courant i , est associée au vecteur \vec{OC} de norme $U_C = I/\omega C$, orthogonal à \vec{OL} . Comme :

$$I = \sqrt{OR^2 + RL^2} = U \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}} = 1,3 U$$

(valeur en mA quand U est exprimé en V), on a :

$$U_C = \frac{I}{\omega C} = 0,8 \cdot 1,3 U = 1,04 U$$



On réalise une deuxième construction de Fresnel en choisissant arbitrairement la longueur du vecteur \vec{OU} , par exemple 25 mm. Dans ces conditions, on construit successivement le vecteur \vec{OC} perpendiculaire à \vec{OL} , de longueur $1,04 \times 25 = 26$ mm, puis le vecteur $\vec{CE} = \vec{OU}$. La résultante $\vec{OE} = \vec{OC} + \vec{CE}$ est associée à la f.é.m. e .

On détermine graphiquement :

- l'avance de phase de i par rapport à e :

$$\psi = \varphi_i - \varphi_e = \varphi_i \cong 23^\circ = 0,4 \text{ rad}$$

- la longueur $OE = 17$ mm, d'où l'on déduit :

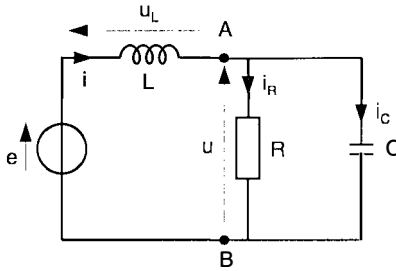
$$E = \frac{17}{25} U = \frac{17}{25} \frac{I}{1,3} = 0,52 I$$

$$\text{et : } I = \frac{E}{0,52} \cong 19 \text{ mA}$$

Le courant i a donc pour expression (en mA) : $i = 19 \cos(10^4 t + 0,4)$

EXERCICE 5.2 :

On a cette fois : $i = i_R + i_C$, et : $e = u + u_L$



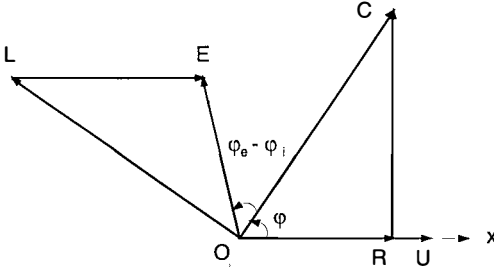
La première construction de Fresnel, réalisée à l'instant où le vecteur \vec{OU} associé à u est porté par Ox , met en jeu les vecteurs \vec{OR} et \vec{RC} associés à i_R et i_C : on peut prendre pour \vec{OR} une longueur de 20 mm, et par conséquent pour \vec{RC} une longueur :

$$RC = OR \cdot \frac{I_C}{I_R} = OR \cdot \omega C R = 20 \cdot 1,5 = 30 \text{ mm}$$

puisque $I_R = U/R$ et $I_C = \omega C U$

On détermine alors graphiquement l'angle $\varphi \cong 56^\circ$ qui mesure l'avance de i par rapport à u . Ce résultat peut être vérifié par le calcul :

$$\varphi = \text{Arc tg} [I_C/I_R] = \text{Arc tg} [1,5]$$



$$I = \sqrt{OR^2 + RC^2} = U \sqrt{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2} = 1,50 U$$

Fixons comme précédemment à 25 mm la longueur du vecteur \vec{OU} . La deuxième construction de Fresnel met en jeu :

- le vecteur \vec{OL} perpendiculaire à \vec{OC} , de longueur :
 $OL = U_L = \omega LI = 1.1,50 U = 37,5 \text{ mm}$

- le vecteur $\vec{LE} = \vec{OU}$

Après construction de la résultante \vec{OE} associée à la f.é.m. e , on détermine graphiquement :

- l'avance de phase de e sur i :

$$\varphi_e - \varphi_i \cong 50^\circ, \text{ soit : } \varphi_i = -50^\circ = -0,88 \text{ rad}$$

- la longueur $OE = 22 \text{ mm}$, d'où l'on déduit :

$$E = \frac{22}{25} U$$

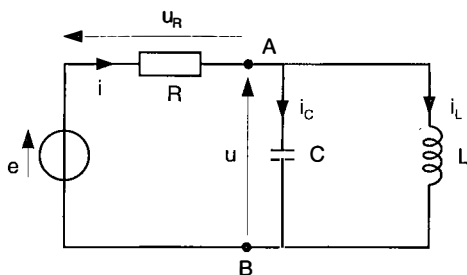
$$\text{soit : } I = 1,5 \cdot \frac{25}{22} E \cong 17 \text{ mA}$$

$$\text{En définitive : } i = 17 \cos(10^4 t - 0,88)$$

EXERCICE 5.3 :

On a dans ce cas :

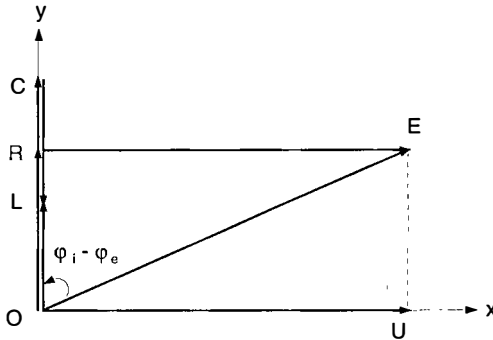
$$i = i_C + i_L, \text{ et : } e = u + u_R$$



Les courants i_C et i_L sont respectivement en avance et en retard de 90° sur la tension. A l'instant où \vec{OU} est porté par Ox , la résultante $\vec{OL} = \vec{OC} + \vec{CL}$ des vecteurs associés à ces 2 courants est dirigée vers les $y > 0$, puisque :

$$I_C = \omega CU = 1,25 U \text{ est supérieur à } I_L = \frac{U}{\omega L} = U$$

$$\text{Au total : } I = I_C - I_L = 0,25 U.$$



La tension u_R étant en phase avec i , on construit tout d'abord le vecteur \vec{OR} colinéaire à \vec{OL} , de longueur $RI = 0,25 RU = 0,3 U$, puis le vecteur $\vec{RE} = \vec{OU}$ de longueur U . On déduit géométriquement :

$$E = \sqrt{U^2 + U_R^2} = U \sqrt{1 + (0,3)^2} = I \frac{\sqrt{1 + (0,3)^2}}{0,25}$$

soit : $I = 2,4 \text{ mA}$.

$\varphi_i - \varphi_e = \varphi_i = \text{Arc tg} [U/U_R] = \text{Arc tg} [3,33] = 73,3^\circ = 1,28 \text{ rad}$

EXERCICE 5.4 :

La résolution de cet exercice par la méthode de Fresnel s'effectue en trois étapes :

a) On établit tout d'abord une relation entre i et u .

Le courant que débite la source de tension est la somme $i = i_R + i_C$ des courants circulant dans R et C , d'après la loi des nœuds.

- i_R est en phase avec la tension u .
- i_C est en avance de 90° sur cette tension.

Effectuons la construction de Fresnel à l'instant t où le vecteur \vec{OU} , de norme U , associé à $u = U \cos(\omega t + \varphi_u)$ est porté par l'axe Ox :

- le vecteur \vec{OR} , de norme $I_R = U/R = 0,5 U$ est alors porté par cet axe.
- le vecteur \vec{RC} , de norme $I_C = \omega CU = 0,6 U$ est dirigé vers les $y > 0$.

Pour réaliser en pratique la construction, on choisit arbitrairement la longueur OU , en prenant par exemple 50 mm . Dans ces conditions :

$$OR = 25 \text{ mm et } RC = 30 \text{ mm}$$

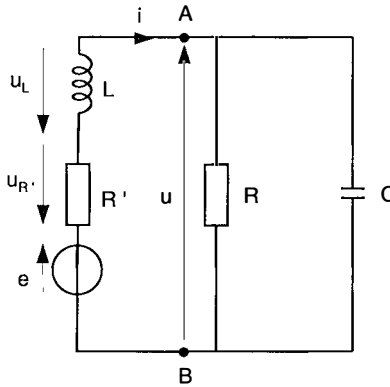
La résultante $\vec{OC} = \vec{OR} + \vec{RC}$ est associée au courant total $i = I \cos(\omega t + \varphi_i)$.
On détermine graphiquement :

- $I = OC = \frac{OC}{OU} \cdot U = 0,78 U$
- $\varphi_i - \varphi_u \cong 50^\circ$

On peut vérifier ces résultats par le calcul :

- $I = \sqrt{I_R^2 + I_C^2} = U \sqrt{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2} = U \sqrt{0,25 + 0,36} = 0,78 U$
- $\varphi_i - \varphi_u = \text{Arc tg} [I_C/I_R] = \text{Arc tg} [\omega C R]$
 $= \text{Arc tg} [1,2] = 50,2^\circ$

b) On établit ensuite une relation entre e et u en examinant la partie du réseau située à gauche des bornes A et B.



D'après la loi des mailles :

$$e = u_{R'} + u_L + u$$

- la tension $u_{R'}$ est en phase avec le courant i : elle est donc associée au vecteur $\vec{OR'}$ de norme $U_{R'} = R'I = 0,8 \cdot 0,78 U = 0,62 U$, dirigé suivant \vec{OC} .

Sur le diagramme, ce vecteur a une longueur de 31 mm.

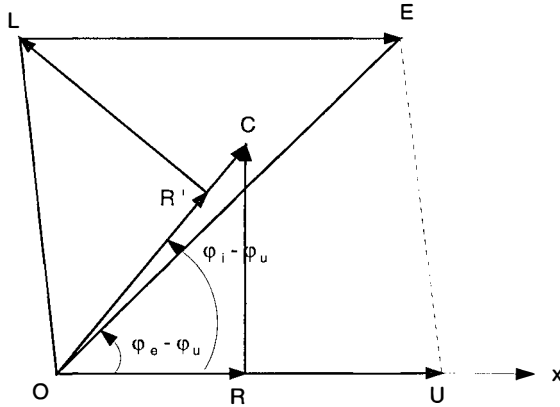
- la tension u_L est en avance de 90° sur le courant i : elle est donc associée au vecteur $\vec{R'L}$ de norme $U_L = \omega LI = 0,82 I = 0,64 U$. Sur le diagramme, ce vec-

teur a une longueur de 32 mm.

- la tension u est associée au vecteur \vec{LE} colinéaire à \vec{OU} .

La résultante $\vec{OE} = \vec{OR}' + \vec{R}'L + \vec{LE}$ est associée à e . On détermine graphiquement :

- $E = OE = 63 \text{ mm} = 1,26 U$
- $\varphi_e - \varphi_u = 44,5^\circ$



c) On détermine en dernier lieu les expressions de i et de u .

- sachant que $E = 1,26 U = 10 \text{ V}$, et que $I = 0,78 U$, on calcule :

$$U = 7,8 \text{ V}$$

$$I = 6,1 \text{ A}$$

- sachant que $\varphi_e = 0$ par hypothèse, que $\varphi_e - \varphi_u = 44,5^\circ$ et $\varphi_i - \varphi_u = 50^\circ$, on déduit :

$$\varphi_u = -44,5^\circ$$

$$\varphi_i = 50^\circ + \varphi_u = 5,5^\circ$$

En définitive, si on exprime t en secondes et ω en degrés par seconde, le courant i et la tension u ont pour expressions :

$$i = 6,1 \cos(\omega t + 5,5) \text{ (en A)}$$

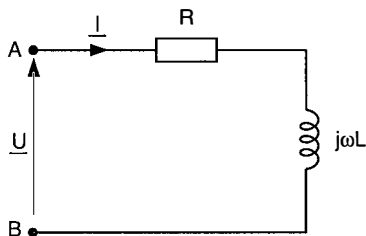
$$u = 7,8 \cos(\omega t - 44,5) \text{ (en V)}$$

EXERCICE 5.5 :

La bobine peut être modélisée par l'association série d'une résistance R avec une inductance L .

L'impédance complexe de ce dipôle est : $\underline{Z} = R + j\omega L$

Les amplitudes complexes \underline{U} et \underline{I} associées à u et i sont liées par la loi d'Ohm :



$$\underline{U} = \underline{Z} \underline{I}, \text{ avec: } \underline{U} = U e^{j\omega t} = U = \sqrt{2} U_{\text{eff}} = 311 \text{ V}$$

- L'amplitude du courant est le module de \underline{I} :

$$\begin{aligned} I &= \frac{U}{|\underline{Z}|}, \text{ avec : } |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = \sqrt{R^2 + 4\pi^2 N^2 L^2} \\ &= \sqrt{(20)^2 + (0,1.2\pi \cdot 50)^2} = 37,2 \text{ } \Omega \end{aligned}$$

soit : $I = 8,35 \text{ A}$.

- La phase φ_i du courant est l'argument de \underline{I} :

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \text{Arg} [\underline{I}] = \varphi_u - \text{Arg} [\underline{Z}] = 0 - \text{Arc tg} \left[\frac{\omega L}{R} \right] \\ &= -\text{Arc tg} [1,57] = -57,5^\circ \cong -1 \text{ rad} \end{aligned}$$

A l'instant t , le courant qui circule dans la bobine a pour expression :

$$i = 8,35 \cos(100 \pi t - 1)$$

EXERCICE 5.6 :

- a) L'impédance complexe de ce dipôle est :

$$\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

Ce dipôle est équivalent à un résistor lorsque la partie imaginaire de son impédance complexe est nulle. Ce résultat s'obtient à la pulsation ω_0 telle que :

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \quad \text{soit : } \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

b) Le déphasage $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ entre la tension u et le courant i est égal à l'argument de \underline{Z} :

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \frac{\pi}{4} = \text{Arc tg} \left[\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right] = \text{Arc tg} \left[2 - \frac{L}{2CR^2} \right]$$

soit : $\text{tg} \frac{\pi}{4} = 2 - \frac{L}{2CR^2} = 1$

et : $C = \frac{L}{2R^2}$

L'amplitude du courant est le quotient :

$$I = \frac{U}{|\underline{Z}|}$$

avec : $|\underline{Z}| = |R(1 + j)| = R\sqrt{2}$

On en déduit : $i = \frac{U}{R\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$

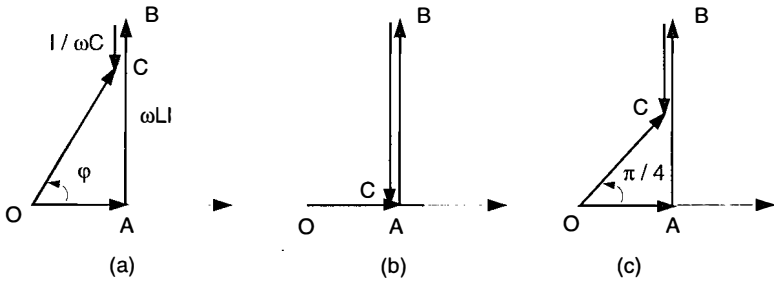
c) Ces trois dipôles en série étant parcourus par le même courant i , on effectue la construction de Fresnel à l'instant où ce courant est associé à un vecteur porté par Ox .

- la tension u_R aux bornes du résistor est en phase avec i . Elle est associée au vecteur \vec{OA} dirigé vers les x positifs, de norme RI .
- La tension u_L aux bornes de l'inductance est en avance de 90° sur le courant. Elle est associée au vecteur \vec{AB} dirigé vers les y positifs, de norme ωLI .
- La tension u_C aux bornes du condensateur est en retard de 90° sur le courant. Elle est associée au vecteur \vec{BC} dirigé vers les y négatifs, de norme $I/\omega C$.

Le vecteur $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BC}$ est associé à la tension totale :

$$u = u_R + u_L + u_C$$

Dans le cas général (figure a), ce vecteur de norme U fait un angle φ avec l'axe Ox , représentant le déphasage $\varphi_u - \varphi_i$ entre u et i .



La question a correspond au cas particulier (b) où les longueurs AB et BC sont égales :

$$\frac{1}{\omega_0 C} = \omega_0 L$$

La question b correspond au cas particulier (c) où :

$$OA = AC = CB = \frac{AB}{2}, \text{ et } \varphi = 45^\circ.$$

EXERCICE 5.7 :

L'impédance complexe du dipôle est :

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= j\omega L + \left[\frac{1}{R} + j\omega C \right]^{-1} \\ &= j\omega L + \frac{R}{1 + j\omega CR} = j\omega L + \frac{R - j\omega CR^2}{1 + \omega^2 C^2 R^2} \end{aligned}$$

Ce dipôle est équivalent à un résistor lorsque la partie imaginaire de son impédance complexe est nulle :

$$\omega L \left[1 + \omega^2 C^2 R^2 \right] = \omega CR^2$$

soit :

$$L = \frac{CR^2}{1 + \omega^2 C^2 R^2}$$

EXERCICE 5.8 :

a) L'admittance complexe du dipôle représenté en (a) a pour expression :

$$\begin{aligned}\underline{Y} &= j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = j\omega C + \frac{R - j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \\ &= \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j \left[\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \right] = \frac{1}{\underline{Z}}\end{aligned}$$

Numériquement :

$$\underline{Y} = 0,05 + j0,45 = 1/\underline{Z}$$

b) On déduit du résultat précédent :

- $Z = \frac{1}{\sqrt{(0,05)^2 + (0,45)^2}} = 2,2\Omega$

- $\varphi = \text{Arg}[\underline{Z}] = -\text{Arg}[\underline{Y}] = -\text{Arc tg}[0,45/0,05] = -83,7^\circ$

c) Désignons par $\underline{Y}' = G' + jB'$ l'admittance complexe du dipôle X. Par hypothèse, la somme :

$$\underline{Y} + \underline{Y}' = (G + G') + j(B + B')$$

doit être réelle.

- On peut utiliser une inductance pure L'_0 telle que : $\frac{1}{\omega L'_0} = 0,45$
soit : $L'_0 = 0,222 \text{ mH}$

- On peut également utiliser une bobine réelle (L' , R') de même susceptance, c'est à dire telle que :

$$\frac{\omega L'}{R'^2 + \omega^2 L'^2} = 0,45$$

La valeur de L' doit être alors inférieure à L'_0 . La valeur de R' ne peut pas être quelconque, puisque l'équation :

$$\omega^2 L'^2 - \frac{\omega L'}{0,45} + R'^2 = 0$$

n'admet de solution en $\omega L'$ que si : $4R'^2 \geq (1/0,45)^2$

c'est-à-dire : $R' \geq \frac{1}{0,90} \Rightarrow R' \geq 1,11\Omega$

Si l'on choisit par exemple $R' = 1\Omega$, on obtient deux valeurs possibles :

$$\omega L' = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{0,45} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{0,45}\right)^2 - 4} \right]$$

$$\text{soit : } \begin{cases} \omega L' = 1,595 \Rightarrow L' = 0,16 \text{ mH} \\ \omega L' = 0,626 \Rightarrow L' = 0,06 \text{ mH} \end{cases}$$

Il existe donc une infinité de solutions (L' , R') avec $R' < 1,11 \Omega$ et $L' < 0,222 \text{ mH}$, mais on ne peut choisir indépendamment L' et R' .

EXERCICE 5.9 :

a) L'admittance du quartz s'écrit :

$$\begin{aligned} \underline{Y}(j\omega) &= j\omega C_0 + \frac{1}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = j\omega C_0 + \frac{j\omega C}{1 - \omega^2 LC} \\ &= j\omega C_0 \frac{1 + \frac{C}{C_0} - \omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC} = jB(\omega) \end{aligned}$$

Cette admittance, purement imaginaire, devient infinie en module (résonance série) lorsque le dénominateur s'annule :

$$1 - \omega^2 LC = 0 \Rightarrow \omega_s^2 = \frac{1}{LC}$$

Elle devient nulle (résonance parallèle) lorsque :

$$1 + \frac{C}{C_0} - \omega^2 LC = 0 \Rightarrow \omega_p^2 = \frac{1}{L} \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_0} \right) = \omega_s^2 \left(1 + \frac{C}{C_0} \right)$$

Compte tenu des valeurs numériques proposées ($C \ll C_0$), on constate que ω_p est à peine supérieur à ω_s :

$$\omega_p \cong \omega_s \left(1 + \frac{C}{2 C_0} \right)$$

On trouve :

$$\omega_s = 1000 \text{ krad/s} ; \omega_p = 1005 \text{ krad/s}$$

b) L'admittance du quartz pouvant se mettre sous la forme :

$$\underline{Y}(j\omega) = j\omega C_0 \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_s^2}$$

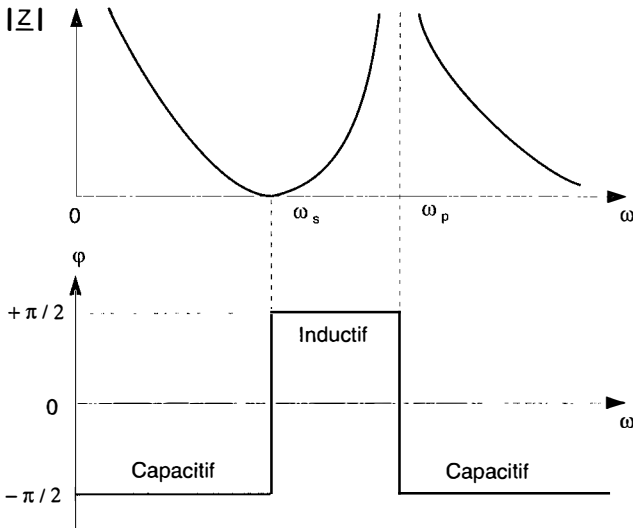
nous écrirons l'impédance :

$$\underline{Z}(j\omega) = \frac{1}{j\omega C_0} \frac{\omega^2 - \omega_s^2}{\omega^2 - \omega_p^2} = j X(\omega)$$

La variation de la réactance $X(\omega)$ s'en déduit très simplement :

ω	0		ω_s		ω_p		$+\infty$	
$X(\omega)$	$-\infty$	\uparrow	0	\uparrow	$+\infty$	$-\infty$	\uparrow	0

Ce qui permet d'esquisser les courbes représentant $|\underline{Z}|$ et $\varphi = \text{Arg} [\underline{Z}]$ en fonction de ω :



On note que le quartz présente un comportement inductif dans l'étroit domaine de pulsations limité par ω_s et ω_p . Cette propriété est mise à profit pour réaliser des oscillateurs sinusoïdaux dont la stabilité en fréquence est remarquable.

Remarque :

Il va de soi, qu'en réalité, les pertes ne sont pas rigoureusement nulles. Il faudrait donc introduire dans le schéma équivalent du quartz une résistance r (très faible) en série avec l'inductance L . Dans ces conditions :

- l'impédance Z serait faible, mais non nulle, à la pulsation ω_s
- elle serait très grande, mais non infinie, à la pulsation ω_p

- la courbe $\varphi(\omega)$ serait quelque peu “adoucie” en ω_s et ω_p

EXERCICE 5.10 :

a) Les impédances complexes des dipôles sont égales :

$$\underline{Z} = R + jX = \frac{j R' X'}{R' + j X'} = \frac{j R' X' (R' - j X')}{R'^2 + X'^2} = \frac{R' X'^2 + j R'^2 X'}{R'^2 + X'^2}$$

En identifiant parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$R = \frac{R' X'^2}{R'^2 + X'^2} = \frac{R'}{1 + \frac{R'^2}{X'^2}}$$

$$X = \frac{R'^2 X'}{R'^2 + X'^2} = \frac{X'}{1 + \frac{X'^2}{R'^2}}$$

On établit les relations inverses en égalant les admittances complexes des deux dipôles :

$$\underline{Y} = \frac{1}{R'} + \frac{1}{jX'} = \frac{1}{R'} - \frac{j}{X'} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2}$$

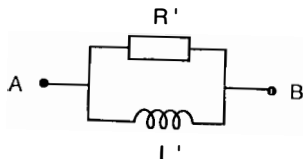
On en déduit : $\frac{1}{R'} = \frac{R}{R^2 + X^2} \Rightarrow R' = \frac{R^2 + X^2}{R}$

et : $\frac{1}{X'} = \frac{X}{R^2 + X^2} \Rightarrow X' = \frac{R^2 + X^2}{X}$

b) Le coefficient de qualité a pour expression :

$$Q = X/R = R'/X'$$

c)



D'après les résultats précédents :

$$R' = \frac{R^2 + X^2}{R} = R(1 + Q^2) \cong RQ^2$$

On remarque que R' est très supérieur à R . Par ailleurs :

$$X' = \frac{R^2 + X^2}{X} = \frac{X^2[1/Q^2 + 1]}{X} = X\left(\frac{1}{Q^2} + 1\right) \cong X$$

Comme : $X' = \omega L'$ et $X = \omega L$, on a aussi :

$$L' = L\left(1 + \frac{1}{Q^2}\right) \cong L$$

Les deux inductances sont du même ordre de grandeur.

d) On a dans ce cas :

$$R = \frac{R'}{1 + \frac{R'^2}{X'^2}} = \frac{R'}{1 + Q^2} \cong \frac{R'}{Q^2}$$

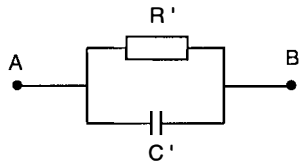
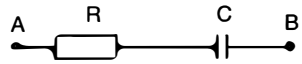
On remarque que R est beaucoup plus petit que R' . D'autre part :

$$X = \frac{X'}{1 + \frac{X'^2}{R'^2}} = \frac{X'}{1 + \frac{1}{Q^2}} \cong X'$$

En remplaçant X et X' par leurs valeurs :

$$X = -\frac{1}{\omega C} \quad X' = -\frac{1}{\omega C'}$$

on établit que C est voisin de C' .



EXERCICE 5.11 :

Déterminons les impédances complexes dans les quatre branches du pont :

$$\underline{Z}_{AB} = 1 / j\omega C_1$$

$$\underline{Z}_{BC} = R_2 // 1 / j\omega C_2 = \frac{R_2}{1 + j\omega C_2 R_2}$$

$$\underline{Z}_{CD} = R_1$$

$$\underline{Z}_{DA} = R + 1 / j\omega C$$

Le pont est équilibré lorsque : $\underline{Z}_{AB} \underline{Z}_{CD} = \underline{Z}_{BC} \underline{Z}_{DA}$

$$\text{soit : } \frac{R_1}{j\omega C_1} = \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right) \left(\frac{R_2}{1 + j\omega C_2 R_2} \right)$$

$$R + \frac{1}{j\omega C} = \frac{R_1 (1 + j\omega C_2 R_2)}{j\omega C_1 R_2} = \frac{R_1}{j\omega C_1 R_2} + \frac{C_2 R_1}{C_1}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires :

$$R = \frac{C_2}{C_1} R_1 \quad C = C_1 \frac{R_2}{R_1}$$

EXERCICE 5.12 :

On a dans ce cas :

$$\underline{Z}_{AB} = \frac{R_1}{1 + j\omega C_1 R_1}$$

$$\underline{Z}_{BC} = P$$

$$\underline{Z}_{CD} = Q$$

$$\underline{Z}_{DA} = \frac{R}{1 + j\omega C R}$$

La condition d'équilibre du pont : $\underline{Z}_{AB} \underline{Z}_{CD} = \underline{Z}_{BC} \underline{Z}_{DA}$

$$\text{conduit à la relation : } \frac{R_1 Q}{1 + j\omega C_1 R_1} = \frac{R P}{1 + j\omega C R}$$

ou encore :
$$\frac{1 + j \omega C_1 R_1}{R_1 Q} = \frac{1 + j \omega C R}{R P}$$

En égalant les parties réelles et imaginaires, on obtient :

- $\frac{1}{R_1 Q} = \frac{1}{R P}$ soit : $R = R_1 \frac{Q}{P}$
- $\frac{C_1}{Q} = \frac{C}{P}$ soit : $C = C_1 \frac{P}{Q}$

EXERCICE 5.13 :

On a ici :

$$\underline{Z}_{AB} = R + j \omega L$$

$$\underline{Z}_{BC} = P$$

$$\underline{Z}_{CD} = \frac{R_1}{1 + j \omega C_1 R_1}$$

$$\underline{Z}_{DA} = Q$$

A l'équilibre : $PQ = (R + j \omega L) \frac{R_1}{1 + j \omega C_1 R_1}$

soit : $PQ + j \omega C_1 R_1 P Q = R R_1 + j \omega L R_1$

On en déduit : $R = \frac{PQ}{R_1}$, $L = C_1 P Q$

EXERCICE 5.14 :

a) La loi d'Ohm s'écrit ici : $\underline{E} = \underline{Z} \underline{I}$

avec :

$$\underline{Z} = R_1 + \frac{R_2 / j \omega C}{R_2 + 1 / j \omega C} = R_1 + \frac{R_2}{1 + j \omega C R_2} = 10^3 + \frac{2 \cdot 10^3}{1 + j}$$

$$\frac{(3 + j) 10^3}{1 + j}$$

(résultat exprimé en ohms)

ou encore : $\underline{Z} = \frac{3+j}{1+j}$ (résultat exprimé en $k\Omega$)

On en déduit :

- $|\underline{Z}| = \sqrt{\frac{10}{2}} = \sqrt{5} \text{ k}\Omega$

- $\text{Arg} [\underline{Z}] = \text{Arg} [3 + j] - \text{Arg} [1 + j]$

$$= \text{Arc tg} [1/3] - \text{Arc tg} [1] = 18,4^\circ - 45^\circ = -26,6^\circ$$

L'amplitude du courant est :

$$I = \frac{E}{|\underline{Z}|} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2 \text{ mA}$$

Sa phase a pour valeur :

$$\varphi_i = \varphi_e - \text{Arg} [\underline{Z}] = 0 + 26,6^\circ = 0,46 \text{ rad}$$

Au total : $i = 2 \cos(\omega t + 0,46)$ (en mA)

b) L'association en parallèle de R_2 et de C a pour impédance complexe :

$$\underline{Z}' = \frac{R_2}{1 + j \omega C R_2} = \frac{2}{1 + j} \quad (\text{en } k\Omega)$$

On a donc : $\underline{U} = \underline{Z}' I$

On en déduit : $U = |\underline{Z}'| I = \frac{2}{\sqrt{2}} I = \sqrt{2} I = 2,8 \text{ V}$

et : $\varphi_u = \text{Arg} [\underline{Z}'] + \varphi_i = -\text{Arg} [1 + j] + \varphi_i$

$$= -\text{Arc tg} [1] + \varphi_i = -45^\circ + 26,6^\circ = -18,4^\circ = -0,32 \text{ rad.}$$

La tension aux bornes du condensateur vaut donc :

$$u = 2,8 \cos(\omega t - 0,32) \quad (\text{en V})$$

Remarque :

On peut calculer u en considérant ce montage comme un diviseur de tension.

Dans ces conditions :

$$\underline{U} = \frac{\underline{Z}'}{\underline{Z}} \underline{E} = \frac{2}{1+j} \cdot \frac{1+j}{3+j} \underline{E} = \frac{2}{3+j} \underline{E}$$

On en déduit :

- $U = \left| \frac{2}{3+j} \right| E = \frac{2}{\sqrt{10}} \cdot 2\sqrt{5} = 2\sqrt{2} = 2,8 \text{ V}$

- $\varphi_u = -\text{Arg} [3 + j] + \varphi_e = -\text{Arc tg} [1/3] + 0 = -18,4^\circ$

EXERCICE 5.15 :

a) On a : $\underline{E} = \underline{Z} I$

$$\text{avec : } \underline{Z} = \frac{1}{j\omega C} + \frac{R j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{R(1 - \omega^2 LC) + j\omega L}{j\omega C[R + j\omega L]}$$

soit :

$$\underline{Z} = \frac{-0,3 + j}{j 1,25(1,2 + j)} = \frac{1 + j 0,3}{1,25(1,2 + j)}$$

On en déduit :

• $Z = 0,534 \text{ k}\Omega$, et :

$$I = E/Z = 18,7 \text{ mA}$$

• $\text{Arg}[\underline{Z}] = \varphi_e - \varphi_i = -\varphi_i$

$$= \text{Arc tg}[0,3] - \text{Arc tg}\left[\frac{1}{1,2}\right]$$

$$= 16,7 - 39,8 = -23,1^\circ$$

soit : $\varphi_i = 23,1^\circ \cong 0,4 \text{ rad}$

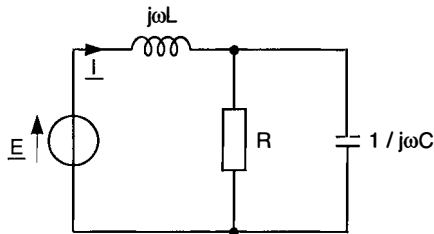
i a donc pour expression (en mA) :

$$i = 18,7 \cos(10\,000 t + 0,4)$$

b) On a : $\underline{E} = \underline{Z} I$

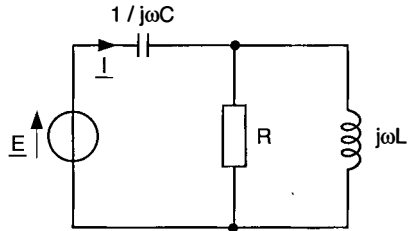
$$\text{avec : } \underline{Z} = j\omega L + \frac{R}{1 + j\omega CR} = \frac{R(1 - \omega^2 LC) + j\omega L}{1 + j\omega CR}$$

$$\text{soit : } \underline{Z} = \frac{-0,3 + j}{1 + j 1,5}$$



On en déduit :

• $Z = 0,579 \text{ k}\Omega$, et $I = E/Z = 17,2 \text{ mA}$.



- $\text{Arg} [\underline{Z}] = \varphi_e - \varphi_i = -\varphi_i = 180 + \text{Arc tg} \left[\frac{1}{-0,3} \right] - \text{Arc tg} [1,5]$
 $= 180 - 73,3 - 56,3 = 50,4^\circ = 0,88 \text{ rad}$

i a donc pour expression :

$$i = 17,2 \cos (10\,000 t - 0,88), \text{ en mA.}$$

c) On a : $\underline{E} = \underline{Z} \underline{I}$

avec : $\underline{Z} = R + \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC}$

soit : $\underline{Z} = 1,2 - j 4$.

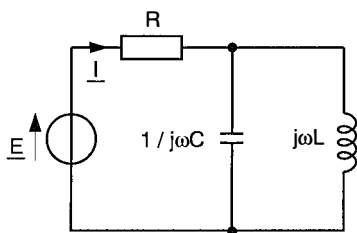
On en déduit :

- $Z = 4,18 \text{ k}\Omega$, et : $I = E/Z = 2,4 \text{ mA}$

- $\text{Arg}[\underline{Z}] = \varphi_e - \varphi_i = -\varphi_i = \text{Arc tg} \left[\frac{-4}{1,2} \right]$
 $= -73,3^\circ = -1,28 \text{ rad}$

i a donc pour expression :

$$i = 2,4 \cos (10\,000 t + 1,28), \text{ en mA}$$

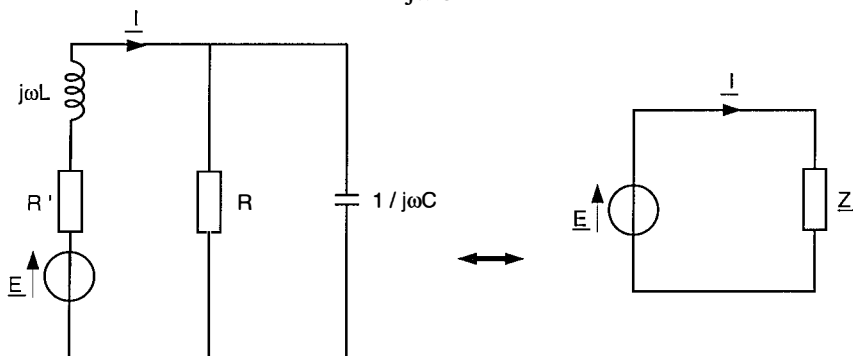


EXERCICE 5.16 :

a) Pour calculer \underline{I} , on peut se ramener à un circuit à une maille dans laquelle :

$$\underline{Z} = R' + j\omega L + (R // 1 / j\omega C)$$

$$= R' + j\omega L + \frac{R}{1 + j\omega CR}$$



Numériquement :

$$\underline{Z} = 0,8 + j0,82 + \frac{2}{1 + j1,2} = 0,8 + j0,82 + \frac{2 - j2,4}{1 + (1,2)^2}$$

$$= 1,62 - j0,16$$

On en déduit : $\underline{I} = \underline{E}/\underline{Z}$, avec : $\underline{E} = E = 10 \text{ V}$.

• l'amplitude I du courant i est le module de \underline{I} :

$$I = |\underline{I}| = \frac{10}{\sqrt{(1,62)^2 + (0,16)^2}} = 6,15 \text{ A}$$

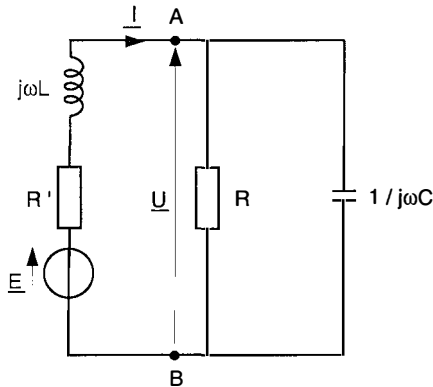
• La phase φ_i du courant est l'argument de \underline{I} :

$$\varphi_i = -\text{Arg}[\underline{Z}] = -\text{Arc tg} \left[\frac{-0,16}{1,62} \right] = 5,6^\circ$$

Au total :

$$i = 6,15 \cos(\omega t + 5,6) \text{ (i en A ; } \omega t \text{ en degrés)}$$

b) Pour calculer \underline{U} , on revient au réseau initial.



On peut écrire la loi d'Ohm à droite des bornes A et B :

$$\underline{I} = \underline{Y} \underline{U}, \text{ avec : } \underline{Y} = \frac{1}{R} + j\omega C = 0,5 + j0,6$$

$$\text{soit : } \underline{U} = \frac{\underline{I}}{\underline{Y}}$$

- l'amplitude U de u a pour valeur :

$$U = \frac{6,15}{\sqrt{(0,5)^2 + (0,6)^2}} = 7,9 \text{ V}$$

- sa phase φ_u vaut :

$$\varphi_u = \varphi_i - \text{Arc tg} \left[\frac{0,6}{0,5} \right] = 5,6 - 50,2 = -44,6^\circ$$

Au total :

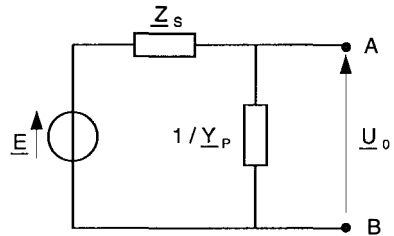
$$u = 7,9 \cos(\omega t - 44,6) \text{ (i en V; } \omega t \text{ en degrés)}$$

EXERCICE 5.17 :

a) $\underline{Z}_S = R + j\omega L$

b) $\underline{Y}_P = 1/R + j\omega C$

c)



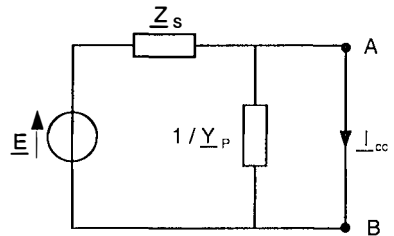
1 – On calcule \underline{U}_0 par la relation du diviseur de tension :

$$\underline{U}_0 = \underline{E} \frac{\underline{Z}_P}{\underline{Z}_S + \underline{Z}_P} = \frac{\underline{E}}{1 + \underline{Z}_S \underline{Y}_P}$$

2 – Lorsqu'on relie les bornes A et B par un court-circuit, la tension aux bornes de l'impédance complexe $1/\underline{Y}_P$ est nulle, de sorte que celle-ci n'est parcourue par aucun courant.

Dans ces conditions :

$$\underline{I}_{cc} = \underline{E}/\underline{Z}_S$$



d) On a : $\underline{E} = E = 10 \text{ V}$

$$\underline{Z}_S = R + j\omega L = (1 + j.2) 10^3 \text{ } (\Omega) = (1 + j.2) \text{ (k}\Omega)$$

$$\underline{Y}_P = 1/R + j\omega C = (1 + j.2) 10^{-3} \text{ } (\Omega^{-1}) = (1 + j.2) \text{ (k}\Omega^{-1})$$

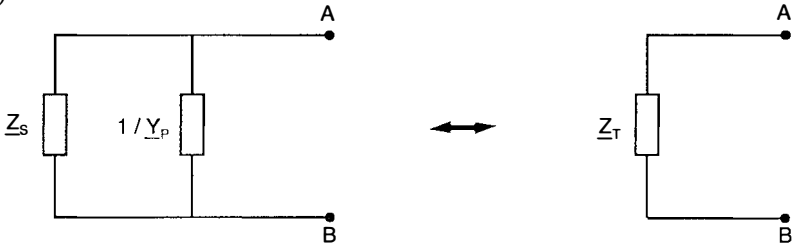
avec ces valeurs :

$$\underline{U}_0 = \frac{10}{1 + (1 + j.2)^2} = \frac{10}{-2 + j.4} = \frac{5}{-1 + j.2} \text{ (en V)}$$

$$\underline{I}_{cc} = \frac{10}{1 + j.2} \text{ (en mA)}$$

e) $\underline{Z}_T = \frac{\underline{U}_0}{\underline{I}_{cc}} = \frac{1 + j.2}{-2 + j.4} \text{ (en k } \Omega \text{)}$

f)



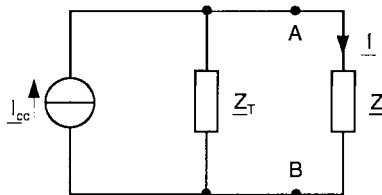
On peut calculer directement \underline{Z}_T en neutralisant la source de tension. Dans ces conditions :

$$\underline{Z}_T = \underline{Z}_S // \frac{1}{\underline{Y}_P} = \frac{\underline{Z}_P \underline{Z}_S}{\underline{Z}_P + \underline{Z}_S} = \frac{\underline{Z}_S}{1 + \underline{Z}_S \underline{Y}_P}$$

numériquement :

$$\underline{Z}_T = \frac{1 + j.2}{1 + (1 + j.2)^2} = \frac{1 + j.2}{-2 + j.4}$$

g) Si on remplace le réseau à gauche des bornes A et B par son équivalent de Norton, on se ramène à un diviseur de courant :



$$\begin{aligned} \underline{I} &= \underline{I}_{cc} \frac{\underline{Z}_T}{\underline{Z} + \underline{Z}_T} = \frac{10}{1+j.2} \cdot \frac{1+j.2}{(-2+j.4) \left[0,2-j.0,6 + \frac{1+j.2}{-2+j.4} \right]} \\ &= \frac{10}{(-2+j.4)(0,2-j.0,6)+1+j.2} = \frac{10}{3+j.4} \end{aligned}$$

h) L'amplitude I du courant réel i est le module de \underline{I} :

$$I = \frac{10}{\sqrt{9+16}} = 2 \text{ mA}$$

Sa phase φ est l'argument de \underline{I} :

$$\varphi = \text{Arg} [\underline{I}] = -\text{Arc tg} [4/3] = -53,1^\circ = -0,93 \text{ rad.}$$

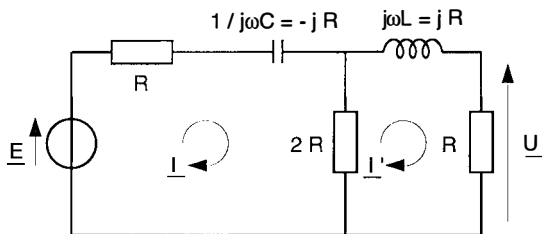
On en déduit :

$$i = 2 \cos (2.10^3 t - 0,93) \quad (\text{en mA})$$

EXERCICE 5.18 :

a) Méthode des mailles :

Désignons par \underline{I} et \underline{I}' les amplitudes complexes des courants de mailles définis comme suit :



Les équations de mailles s'écrivent alors :

$$\text{maille 1 : } [3R - j/\omega C] \underline{I} - 2R \underline{I}' = \underline{E}$$

$$\text{maille 2 : } -2R \underline{I} + [3R + j\omega L] \underline{I}' = 0$$

soit :

$$(3 - j) \underline{I} - 2 \underline{I}' = \underline{E} / R$$

$$-2 \underline{I} + (3 + j) \underline{I}' = 0$$

On en déduit :

$$\underline{I}' = \frac{\begin{vmatrix} (3-j) & \underline{E}/R \\ -2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (3-j) & -2 \\ -2 & (3+j) \end{vmatrix}} = \frac{2 \underline{E}/R}{(3-j)(3+j)-4}$$

soit :

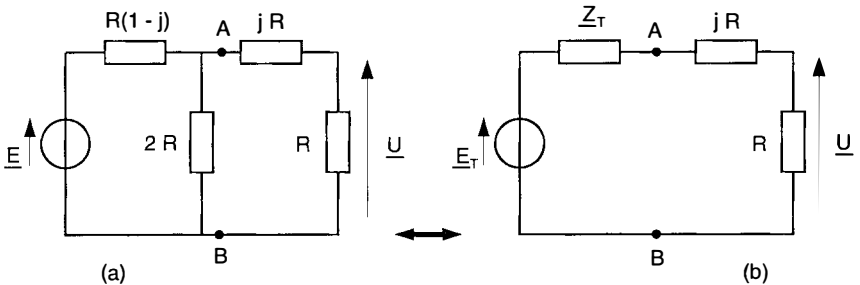
$$\underline{I}' = \frac{2 \underline{E}/R}{10-4} = \frac{\underline{E}}{3R} = \frac{E}{3R}$$

et : $\underline{U} = R \underline{I}' = E/3$

La tension u est donc en phase avec la f.é.m. e :

$$u = E/3 \cos \omega t$$

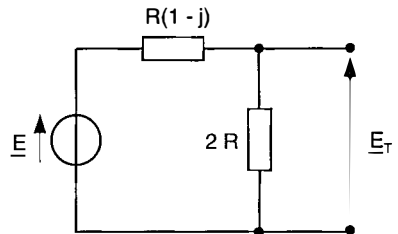
b) On peut traiter cet exercice en remplaçant le réseau à gauche des bornes A et B (figure a) par son équivalent (\underline{E}_T , \underline{Z}_T) de Thévenin (figure b) :



\underline{E}_T est l'amplitude complexe de la d.d.p. à vide que fournit le diviseur de tension de bornes A et B :

$$\underline{E}_T = \frac{2R \underline{E}}{2R + R - jR} = \frac{2 \underline{E}}{3-j}$$

La source de tension étant neutralisée :



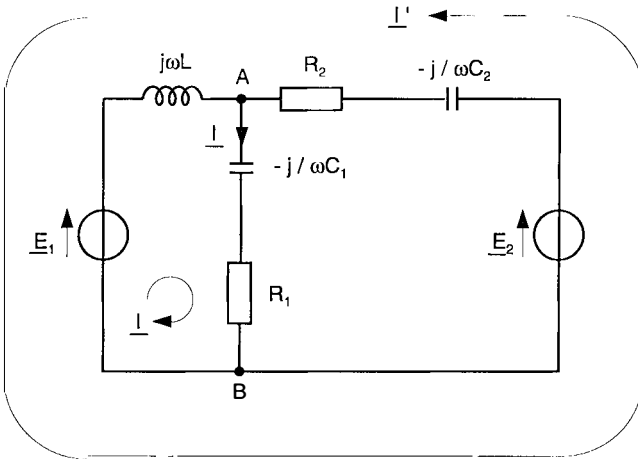
$$\begin{aligned} \underline{Z}_T &= 2R // R(1-j) \\ &= \frac{2R^2(1-j)}{3R - jR} = \frac{2R(1-j)}{3-j} \end{aligned}$$

Le réseau (b) est un diviseur de tension dans lequel :

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \frac{R}{\underline{Z}_T + jR + R} \underline{E}_T = \frac{R}{\frac{2R(1-j)}{3-j} + (j+1)R} \cdot \frac{2}{3-j} \underline{E} \\ &= \frac{2 \underline{E}}{2(1-j) + (1+j)(3-j)} = \underline{E} / 3 \end{aligned}$$

EXERCICE 5.19 :

a) Définissons et orientons comme suit les mailles indépendantes du réseau :



On établit directement les deux équations suivantes :

$$\text{maille 1 : } \left[R_1 + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C_1} \right) \right] \underline{I} - j\omega L \underline{I}' = \underline{E}_1$$

$$\text{maille 2 : } -j\omega L \underline{I} + \left[R_2 + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C_2} \right) \right] \underline{I}' = \underline{E}_2 - \underline{E}_1$$

b) Numériquement :

$$\omega L = 2 \text{ k}\Omega ; 1/\omega C_1 = 1/\omega C_2 = 1 \text{ k}\Omega ;$$

$$\underline{E}_1 = E_1 = 2 \text{ V} ;$$

$$\underline{E}_2 = E_2 e^{j\pi/4} = E_2 (\cos \pi/4 + j \sin \pi/4) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 + j$$

\underline{I} et \underline{I}' étant exprimés en mA, le système précédent s'écrit donc :

$$(1 + j) \underline{I} - 2j \underline{I}' = 2$$

$$-2j \underline{I} + (2 + j) \underline{I}' = -1 + j$$

c) On en tire :

$$\underline{I} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2j \\ -1+j & 2+j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+j & -2j \\ -2j & 2+j \end{vmatrix}} = \frac{4 + j \cdot 2 - j \cdot 2 - 2}{1 + j \cdot 3 + 4} = \frac{2}{5 + j \cdot 3}$$

• L'amplitude du courant est : $I = |\underline{I}| = \frac{2}{\sqrt{25+9}} = \frac{2}{\sqrt{34}} = 0,34 \text{ mA}$

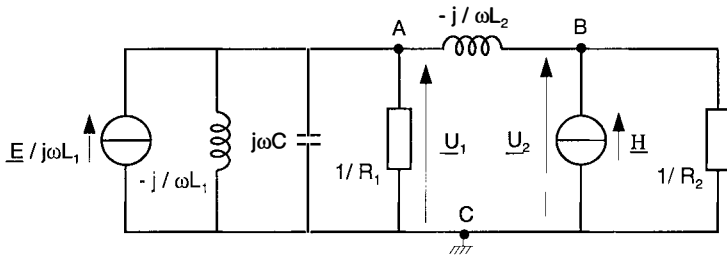
• La phase du courant est : $\varphi_i = \text{Arg} [\underline{I}] = -\text{Arc tg} [3/5]$
 $= -30,9^\circ = -0,54 \text{ rad}$

On a donc :

$$i = I \cos (\omega t + \varphi_i) = 0,34 \cos (10^4 \cdot t - 0,54) \quad (\text{en mA})$$

EXERCICE 5.20 :

a) En notations complexes, on peut remplacer le générateur de tension ($\underline{E}, j\omega L_1$) par le générateur de courant équivalent ($\underline{E}/j\omega L_1 // j\omega L_1$).



Faisons apparaître sur la figure les admittances complexes des dipôles. On établit directement les deux équations de nœuds :

$$\text{en A : } \left[\frac{1}{R_1} + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L_1} - \frac{1}{\omega L_2} \right) \right] \underline{U}_1 + \frac{j}{\omega L_2} \underline{U}_2 = \frac{\underline{E}}{j\omega L_1}$$

$$\text{en B : } \frac{j}{\omega L_2} \underline{U}_1 + \left[\frac{1}{R_2} - \frac{j}{\omega L_2} \right] \underline{U}_2 = \underline{H}$$

b) Numériquement :

$$\omega C = 3.10^{-3} \Omega^{-1} ; 1/\omega L_1 = 2.10^{-3} \Omega^{-1}$$

$$1/\omega L_2 = 1.10^{-3} \Omega^{-1} ; \underline{E}/j\omega L_1 = -j.4 \cdot 10^{-3} \text{A}$$

$$\underline{H} = 10^{-3} e^{j\pi/2} = j.1.10^{-3} \text{A}$$

Le système d'équations s'écrit donc :

$$\underline{U}_1 + j \underline{U}_2 = -j.4$$

$$j \underline{U}_1 + (2 - j) \underline{U}_2 = j$$

On en déduit :

$$\underline{U}_1 = \frac{\begin{vmatrix} -j.4 & j \\ j & 2-j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & j \\ j & 2-j \end{vmatrix}} = \frac{-j.8 - 4 + 1}{2 - j + 1} = \frac{-3 - j.8}{3 - j}$$

c) L'amplitude de la tension u_1 est le module de \underline{U}_1 :

$$U_1 = \frac{\sqrt{9+64}}{\sqrt{9+1}} = \sqrt{\frac{73}{10}} = 2,70 \text{ V}$$

La phase de u_1 est l'argument de \underline{U}_1 :

$$\begin{aligned} \varphi_u &= \text{Arg} [\underline{U}_1] = 180^\circ + \text{Arc tg} [8/3] - \text{Arc tg} [-1/3] \\ &= 180^\circ + 69,4^\circ + 18,4^\circ = 267,8^\circ > 180^\circ. \end{aligned}$$

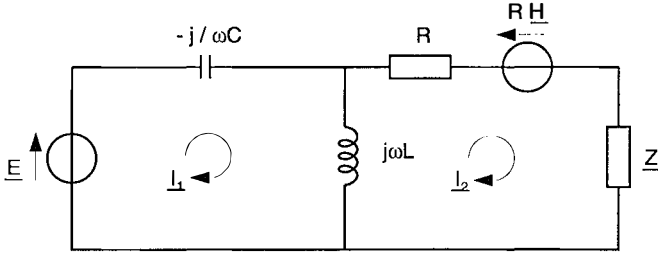
On note plutôt $\varphi_u = -360^\circ + 267,8^\circ = -92,2^\circ = -1,6 \text{ rad}$.

La tension u_1 a donc pour expression :

$$u_1 = U_1 \cos(\omega t + \varphi_u) = 2,70 \cos(10^3.t - 1,6) \text{ volts}$$

EXERCICE 5.21 :

a) Dans le réseau initial, remplaçons le générateur de courant ($\eta // R$) par le générateur de tension équivalent. Définissons et orientons comme suit les courants de mailles I_1 et I_2 :



Les équations de mailles s'écrivent :

$$\text{maille 1 : } j(\omega L - 1/\omega C) I_1 - j\omega L I_2 = \underline{E}$$

$$\text{maille 2 : } -j\omega L I_1 + (R + j\omega L + \underline{Z}) I_2 = -RH$$

$$\text{avec : } \underline{E} = E ; \underline{H} = H e^{-j\pi/2} = -j H$$

soit :

$$\text{maille 1 : } I_1 - 3 I_2 = -j E/R$$

$$\text{maille 2 : } -3 I_1 + 2(2-j) I_2 = H$$

On en déduit :

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -jE/R \\ -3 & H \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2(2-j) \end{vmatrix}} = \frac{H - j.3E/R}{-5 - j.2}$$

$$= \frac{10 - j.15}{-5 - j.2} = 5 \frac{3 + j.2}{2 - j.5}$$

• L'amplitude du courant i_2 est :

$$I_2 = 5 \sqrt{\frac{9+4}{4+25}} = 3,35 \text{ mA}$$

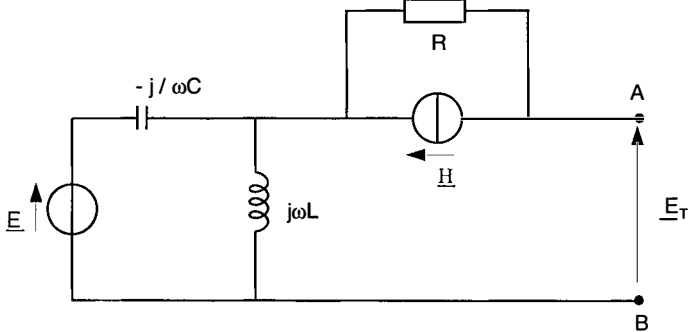
• Sa phase a pour valeur :

$$\begin{aligned} \varphi &= \text{Arg}[I_2] = \text{Arg}[5] + \text{Arg}[3 + j.2] - \text{Arg}[2 - j.5] \\ &= 0 + \text{Arc tg}[2/3] - \text{Arc tg}[-5/2] \\ &= 33,7 + 68,2 = 101,9^\circ = 1,78 \text{ rad} \end{aligned}$$

Le courant i a donc pour expression (en mA) :

$$i = 3,35 \cos(\omega t + 1,78)$$

b) Pour déterminer l'amplitude complexe \underline{E}_T , on déconnecte la charge initialement comprise entre les bornes A et B.



Le courant \underline{H} circule intégralement dans R . La tension aux bornes de l'inductance est donnée par la relation du diviseur de tension. Au total :

$$\underline{E}_T = \underline{E} \frac{j\omega L}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} - R\underline{H}$$

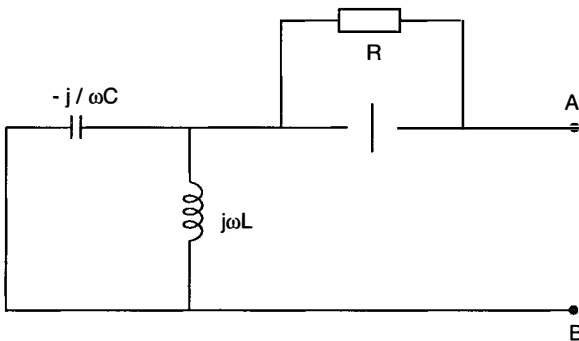
avec : $\underline{E} = E$

et : $\underline{H} = H e^{-j\pi/2} = -jH$

soit :

$$\underline{E}_T = E \frac{j \cdot 3R}{j \cdot 3R - j \cdot 2R} + j R H = 5(3 + j \cdot 2)$$

Pour déterminer \underline{Z}_T , on neutralise les deux sources du réseau.

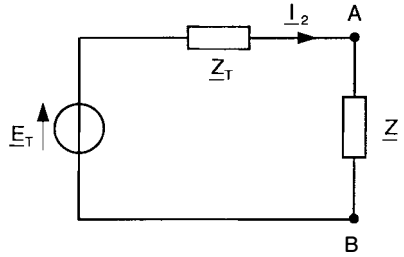


On a donc :

$$\underline{Z}_T = R + \frac{(j\omega L)(-j/\omega C)}{j\omega L - j/\omega C} = R + \frac{3R \cdot 2R}{j \cdot 3R - j \cdot 2R} = R(1 - j \cdot 6)$$

Le réseau, vu par la charge, peut être remplacé par son équivalent de Thévenin :

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{\underline{E}_T}{\underline{Z} + \underline{Z}_T} \\
 &= \frac{5(3 + j.2)}{R + j.R + R - j.6R} \\
 &= \frac{5(3 + j.2)}{R(2 - j.5)}
 \end{aligned}$$



On retrouve l'expression précédente.

EXERCICE 5.22 :

a) Calculons tout d'abord : $\omega L_1 = \omega L_3 = 100 \Omega$; $1/\omega C_2 = 100 \Omega$; $1/\omega C_3 = 200 \Omega$.

Les admittances complexes des trois dipôles ont respectivement pour valeurs :

$$\begin{aligned}
 \underline{Y}_1 &= \frac{1}{R_1 + j\omega L_1} = \frac{1}{100(1 + j)} = \frac{1 - j}{200} \\
 \underline{Y}_2 &= \frac{1}{R_2 - j/\omega C_2} = \frac{1}{100(2 - j)} = \frac{2 + j}{500} \\
 \underline{Y}_3 &= \frac{1}{j(\omega L_3 - 1/\omega C_3)} = \frac{1}{j(100 - 200)} = \frac{j}{100}
 \end{aligned}$$

b) Les amplitudes complexes I_1 , I_2 , I_3 peuvent être calculées par la relation du diviseur de courant :

$$I_1 = I \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = 2 \cdot \frac{1 - j}{200 \left[\frac{1 - j}{200} + \frac{2 + j}{500} + \frac{j}{100} \right]} = \frac{10(1 - j)}{9 + j.7}$$

$$I_2 = I \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = 2 \cdot \frac{2 + j}{500 \left[\frac{1 - j}{200} + \frac{2 + j}{500} + \frac{j}{100} \right]} = \frac{4(2 + j)}{9 + j.7}$$

$$I_3 = I \frac{\underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = 2 \cdot \frac{j}{100 \left[\frac{1 - j}{200} + \frac{2 + j}{500} + \frac{j}{100} \right]} = \frac{j.20}{9 + j.7}$$

On en déduit les amplitudes des courants :

$$I_1 = 10 \sqrt{\frac{1+1}{81+49}} = 10 \sqrt{\frac{2}{130}} = 1,24 \text{ A}$$

$$I_2 = 4 \sqrt{\frac{4+1}{130}} = 0,78 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{20}{\sqrt{130}} = 1,75 \text{ A}$$

ainsi que leurs phases :

$$\varphi_1 = \text{Arg} [I_1] = \text{Arc tg} [-1] - \text{Arc tg} [7/9] = -45 - 37,8 = -82,9^\circ$$

$$\varphi_2 = \text{Arg} [I_2] = \text{Arc tg} [1/2] - \text{Arc tg} [7/9] = 26,5 - 37,8 = -11,3^\circ$$

$$\varphi_3 = \text{Arg} [I_3] = \text{Arc tg} [\infty] - \text{Arc tg} [7/9] = 90 - 37,8 = 52,2^\circ$$

c) La tension u est associée à l'amplitude complexe :

$$\underline{U} = I_1 / \underline{Y}_1 = I_2 / \underline{Y}_2 = I_3 / \underline{Y}_3 = I / (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3)$$

soit :

$$\underline{U} = \frac{2}{\frac{1-j}{200} + \frac{2+j}{500} + \frac{j}{100}} = \frac{2000}{9+7j}$$

On tire de cette expression :

- $U = \frac{2000}{\sqrt{130}} = 175,4 \text{ V}$

- $\varphi = -\text{Arg} [9 + j.7] = -\text{Arc tg} [7/9] = -37,8^\circ = -0,66 \text{ rad}$

soit :

$$u = 175,4 \cos (10^3 t - 0,66) \quad (\text{V})$$

La puissance active reçue par le premier dipôle est :

$$P_1 = R_1 I_1^2 / 2 = 76,9 \text{ W}$$

Le deuxième dipôle reçoit une puissance :

$$P_2 = R_2 I_2^2 / 2 = 61,5 \text{ W}$$

Le troisième dipôle ne reçoit aucune puissance.

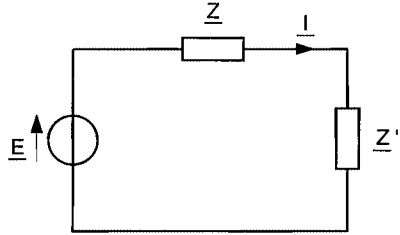
EXERCICE 5.23 :

La puissance active P délivrée par le générateur est égale à la puissance reçue par la charge, soit :

$$P = R' I^2/2$$

L'amplitude complexe du courant que débite la source est :

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z} + \underline{Z}'} = \frac{\underline{E}}{(R + R') + j(X + X')}$$



On a donc :

$$I = |\underline{I}| = \frac{E}{\sqrt{(R + R')^2 + (X + X')^2}}$$

et :

$$P = \frac{R' E^2}{2[(R + R')^2 + (X + X')^2]}$$

Cette fonction de R' et X' admet un extremum (ici un maximum) lorsque l'on a à la fois :

$$\bullet \frac{\partial P}{\partial X'} = 0 \text{ soit : } \frac{-4 R' E^2 (X + X')}{4[(R + R')^2 + (X + X')^2]^2} = 0$$

ce qui implique : $X' = -X$

$$\bullet \frac{\partial P}{\partial R'} = 0 \text{ soit : } \frac{2 E^2 [(R + R')^2 + (X + X')^2] - 4 R' E^2 (R + R')}{4[(R + R')^2 + (X + X')^2]^2} = 0$$

ce qui implique :

$$(R + R')(R + R' - 2R') + (X + X')^2 = 0$$

ou encore :

$$R = R', \text{ puisque } X + X' = 0$$

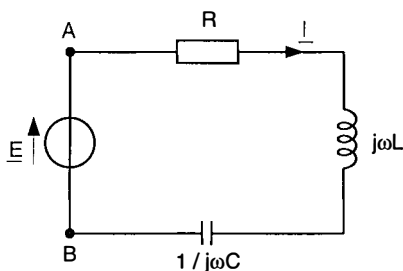
Par suite, la puissance délivrée par le générateur est maximum dans une charge d'impédance $\underline{Z}' = R - jX = \underline{Z}^*$. Cette puissance a pour valeur :

$$P_{\text{Max}} = \frac{E_{\text{eff}}^2}{4R}$$

EXERCICE 5.24 :

a) L'amplitude complexe du courant traversant le dipôle AB d'impédance complexe $\underline{Z} = R + j(\omega L - 1/\omega C) = R + jX$ est :

$$\underline{I} = \underline{E} / \underline{Z}$$



L'intensité efficace vaut donc :
$$I_{\text{eff}} = \frac{I}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{E}{\sqrt{2}}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

soit numériquement :
$$I_{\text{eff}} = \frac{8,48 / \sqrt{2}}{\sqrt{25 + 9}} = \frac{6}{\sqrt{34}} = 1,03 \text{ A}$$

La puissance active reçue par le dipôle est le produit :

$$P = R I_{\text{eff}}^2 = 5,29 \text{ W}$$

La puissance réactive est le produit :

$$Q = X I_{\text{eff}}^2 = 3,17 \text{ VAR}$$

La puissance apparente a pour valeur :

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 6,17 \text{ VA}$$

b) Le facteur de puissance est le quotient :

$$\cos \varphi = P/S = 5,29/6,17 = 0,86.$$

EXERCICE 5.25 :

a) Lorsqu'on applique une tension efficace $E_{\text{eff}} = E / \sqrt{2}$ aux bornes d'un dipôle passif d'admittance complexe $\underline{Y} = G + jB$, celui-ci reçoit une puissance active $P = E^2 G/2$, et une puissance réactive $Q = -E^2 B/2$.

Le circuit étudié est constitué de trois dipôles en parallèle, d'admittances complexes :

$$\underline{Y}_1 = 1/R ; \underline{Y}_2 = \frac{1}{R' + j\omega L} = \frac{R'}{R'^2 + \omega^2 L^2} - j \frac{\omega L}{R'^2 + \omega^2 L^2} ; \underline{Y}_3 = j\omega C$$

Les puissances actives et réactives qu'ils reçoivent ont donc pour valeurs :

$$P_1 = \frac{E^2}{2R} = 1 \text{ W}$$

$$Q_1 = 0$$

$$P_2 = \frac{R'}{R'^2 + \omega^2 L^2} \cdot \frac{E^2}{2} = 0,27 \text{ W}$$

$$Q_2 = \frac{\omega L E^2 / 2}{R'^2 + \omega^2 L^2} = 1,62 \text{ VAR}$$

$$P_3 = 0$$

$$Q_3 = -\omega C E^2 / 2 = -0,5 \text{ VAR}$$

Au total, la source fournit :

- une puissance active $P = P_1 + P_2 = 1,27 \text{ W}$
- une puissance réactive $Q = Q_2 + Q_3 = 1,12 \text{ VAR}$
- une puissance apparente $S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 1,69 \text{ V.A}$

b) Le facteur de puissance du circuit est : $\cos \varphi = \frac{P}{S} = 0,75$
L'intensité efficace, qui est telle que $S = E_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$,

a pour valeur :

$$I_{\text{eff}} = \frac{S}{E_{\text{eff}}} = \frac{S\sqrt{2}}{E} = 0,24 \text{ A}$$

EXERCICE 5.26 :

a) On calcule la fonction de transfert :

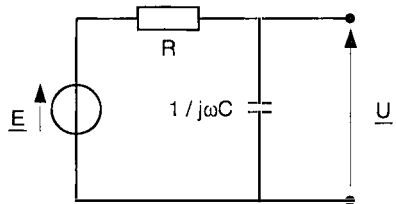
$$\frac{\underline{U}}{\underline{E}} = \frac{1/j\omega C}{1/j\omega C + R} = \frac{1}{1 + j\omega C R} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega / \omega_c}$$

avec $\omega_c = 1/RC$.

b) ω_c représente la pulsation de coupure à -3 dB . En effet, pour $\omega = \omega_c$,



on a :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1+j}$$

soit : $A = 1/\sqrt{2}$ et $\varphi = 0 - \frac{\pi}{4}$,

ce qui donne :

$$u = \frac{E}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

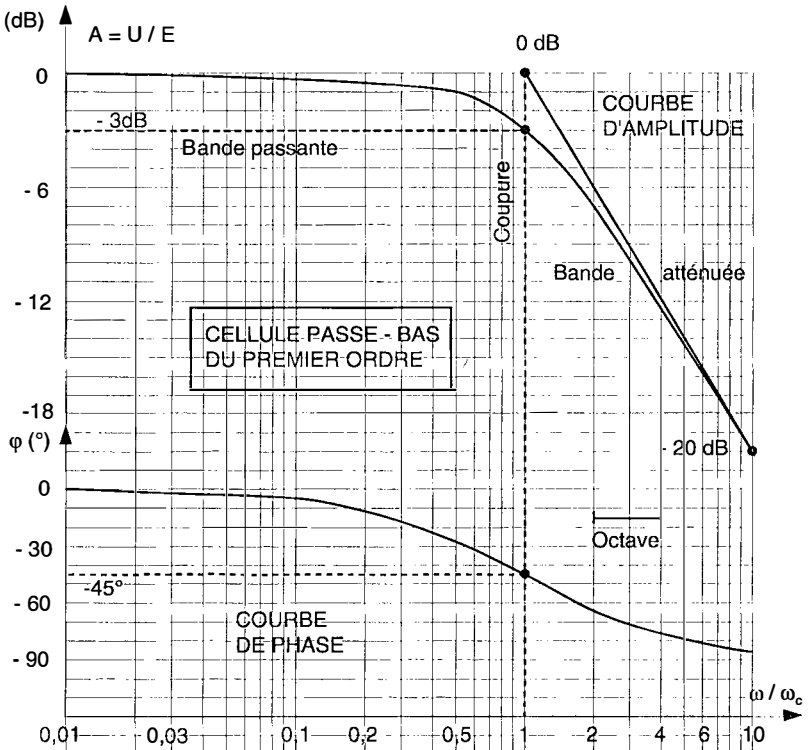
L'atténuation en décibels s'exprime par la relation :

$$A_{dB} = -20 \log \sqrt{2} = -10 \log 2 = -3 \text{ dB}$$

c) Comportement asymptotique :

- pour $\omega \ll \omega_c$, on a : $\underline{H}(j\omega) \sim 1$; $A_{dB} = 0$; $\varphi = 0$

La courbe d'amplitude présente une asymptote horizontale au niveau 0 dB, du côté des basses fréquences.



- pour $\omega \gg \omega_c$, on a : $\underline{H}(j\omega) \sim -j \frac{\omega_c}{\omega}$; $A_{dB} = -20 \log \frac{\omega}{\omega_c}$; $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

La courbe d'amplitude présente une asymptote oblique du côté des fréquences hautes. Pour tracer cette asymptote, nous pouvons prendre 2 des 3 points suivants :

- $\omega = \omega_c \rightarrow A_{dB} = 0$
- $\omega = 2 \omega_c$, soit une octave au dessus de la pulsation de coupure :

$$A_{dB} = -20 \log 2 = -20 \cdot 0,3 = -6 \text{ dB}$$

- $\omega = 10 \omega_c$, soit une décade au dessus de la pulsation de coupure :

$$A_{dB} = -20 \log 10 = -20 \text{ dB}$$

La pente de cette asymptote vaut donc :

$$\begin{aligned} & -6 \text{ dB/octave} \\ & -20 \text{ dB/décade} \end{aligned}$$

Cette asymptote recoupe l'asymptote horizontale au niveau 0 dB pour $\omega = \omega_c$. Ce diagramme asymptotique est caractéristique d'un filtre passe-bas du premier ordre.

La courbe de phase présente une asymptote horizontale à 0° du côté des basses fréquences, et une asymptote horizontale à -90° du côté des hautes fréquences.

Pour tracer les courbes, on dispose déjà du point particulier $\omega = \omega_c$. On peut en citer 2 supplémentaires :

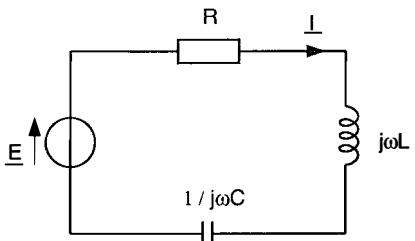
- $\omega = 2 \omega_c$ $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j \cdot 2} \begin{cases} A_{dB} = -10 \log 5 \cong -7 \text{ dB} \\ \varphi = -\text{Arc tg}[0,5] \cong -63^\circ \end{cases}$

- $\omega = \omega_c/2$ $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j \cdot 0,5} \begin{cases} A_{dB} = -10 \log 1,25 \cong -1 \text{ dB} \\ \varphi = -\text{Arc tg}[0,5] \cong -27^\circ \end{cases}$

On constate qu'en ces deux points, la courbe d'amplitude passe à 1 dB au dessous de ses asymptotes.

EXERCICE 5.27 :

a) Il s'agit de déterminer le courant dans le circuit, soit $i = I \cos(\omega t + \varphi)$, lorsqu'on fait varier la fréquence de la source d'excitation $e = E \cos \omega t$.



En notations complexes, la réponse est donnée par la relation :

$$\underline{I} = I e^{j\varphi} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}(j\omega)}$$

avec :

$$\underline{Z}(j\omega) = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = R + j X(\omega)$$

b) La réactance X s'annule à la pulsation ω_0 telle que $\omega_0^2 LC = 1$, pour laquelle $I_0 = E/R$ et $\varphi_0 = 0$. I_0 est la valeur maximale de l'amplitude du courant : en effet, $|R + jX|$ est minimale pour $X = 0$ puisque R est une constante.

Numériquement, on trouve : $\omega_0 = 10$ krad/s ; $I_0 = 4$ mA.

Pour une valeur quelconque de ω , l'amplitude I et la phase φ sont données par les relations :

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + X^2}} \quad \varphi = - \text{Arc tg } [X/R]$$

Les courbes (1) et (2) montrent l'évolution de I et de φ en fonction de ω , entre 0 et 30 krad/s. On observe un comportement capacitif du circuit au dessous de la pulsation de résonance ω_0 (le courant i étant en avance de phase sur e dans ce domaine). Il devient par contre inductif lorsque la pulsation dépasse ω_0 (i est alors en retard sur e).

c) La réponse en courant peut être normalisée à partir de l'expression :

$$\underline{I} = \frac{E/R}{1 + j \frac{1}{R} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}$$

qui donne, en introduisant la pulsation $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$:

$$\frac{\underline{I}}{I_0} = \frac{1}{1 + j \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \left(\omega \sqrt{LC} - \frac{1}{\omega \sqrt{LC}} \right)}$$

Si on désigne par Q le coefficient de qualité du circuit :

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

on obtient :

$$\frac{\underline{I}}{I_0} = \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

et enfin, en posant $x = \omega / \omega_0$:

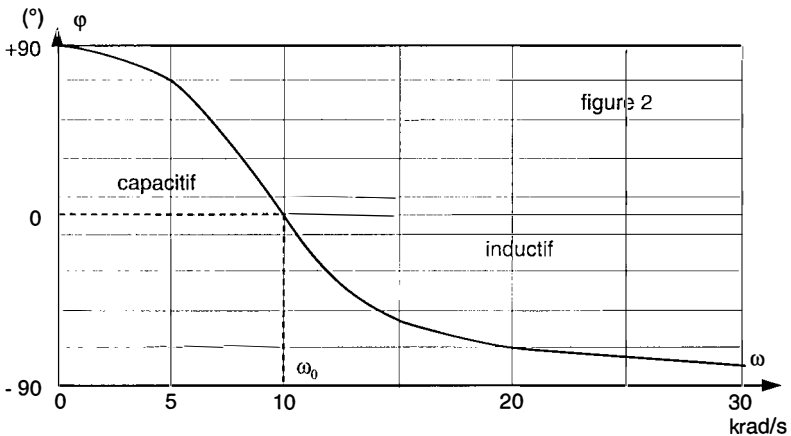
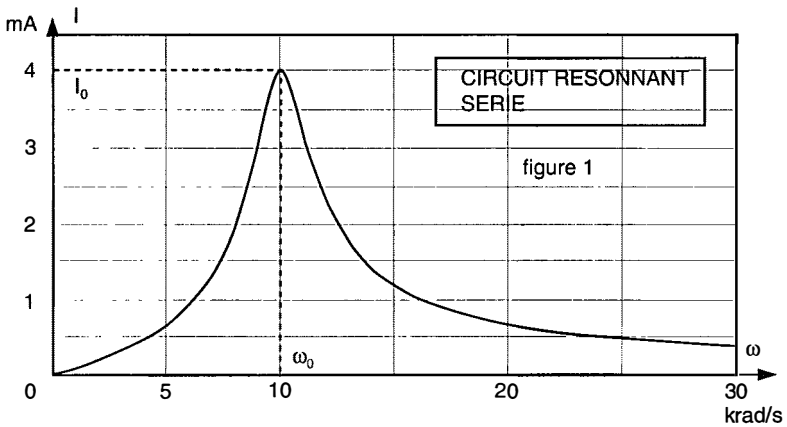
$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)}$$

Cette expression établit une relation entre le courant complexe réduit I/I_0 et la fréquence réduite x , relation valable pour n'importe quel circuit résonnant série, caractérisé par son seul coefficient de qualité Q .

On peut remarquer que Q peut également s'écrire sous la forme :

$$Q = \frac{L \omega_0}{R} = \frac{1}{RC \omega_0}$$

Numériquement : $Q = \frac{1}{0,25} \sqrt{\frac{0,1}{0,1}} = 4$ (sans dimension)



d) L'amplitude réduite et la phase du courant s'écrivent respectivement :

$$A(x) = \frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} \quad \varphi(x) = - \text{Arc tg} \left[Q \left(x - \frac{1}{x}\right) \right]$$

On observe que si l'on change x en $1/x$, l'amplitude prend la même valeur, alors que la phase prend la valeur opposée. Si l'on adopte une échelle logarithmique en abscisses, la courbe de réponse en amplitude présente une symétrie paire par rapport à la verticale $x = 1$, tandis que la courbe de réponse en phase admet une symétrie impaire par rapport au point $(x = 1, \varphi = 0)$.

Outre ces considérations de symétrie, l'intérêt d'utiliser une échelle logarithmique en abscisses est de couvrir un large domaine de fréquences de part et d'autre de la résonance, en "dilatant" les fréquences basses et en "contractant" les fréquences élevées.

Par ailleurs, il est également commode d'utiliser une échelle logarithmique pour représenter l'amplitude réduite. A cet effet, on note :

$$A_{\text{dB}} = 20 \log \frac{I}{I_0} = - 10 \log \left[1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \right]$$

On obtient ainsi les courbes représentées figures (3) et (4).

Diagrammes asymptotiques :

Aux fréquences élevées ($x \gg 1$), on peut écrire : $\underline{H}(jx) \sim \frac{1}{jQx}$

soit : $\varphi(x) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ et $A(x) \sim \frac{1}{Qx}$

La courbe d'amplitude présente alors une asymptote oblique d'équation :

$$A_{\text{dB}} = - 20 \log x - 20 \log Q$$

Il s'agit d'une droite de pente $- 20$ dB/décade (soit $- 6$ dB/octave) passant pour $x = 1$ par le point $- 20 \log Q = - 20 \log 4 = - 12$ dB.

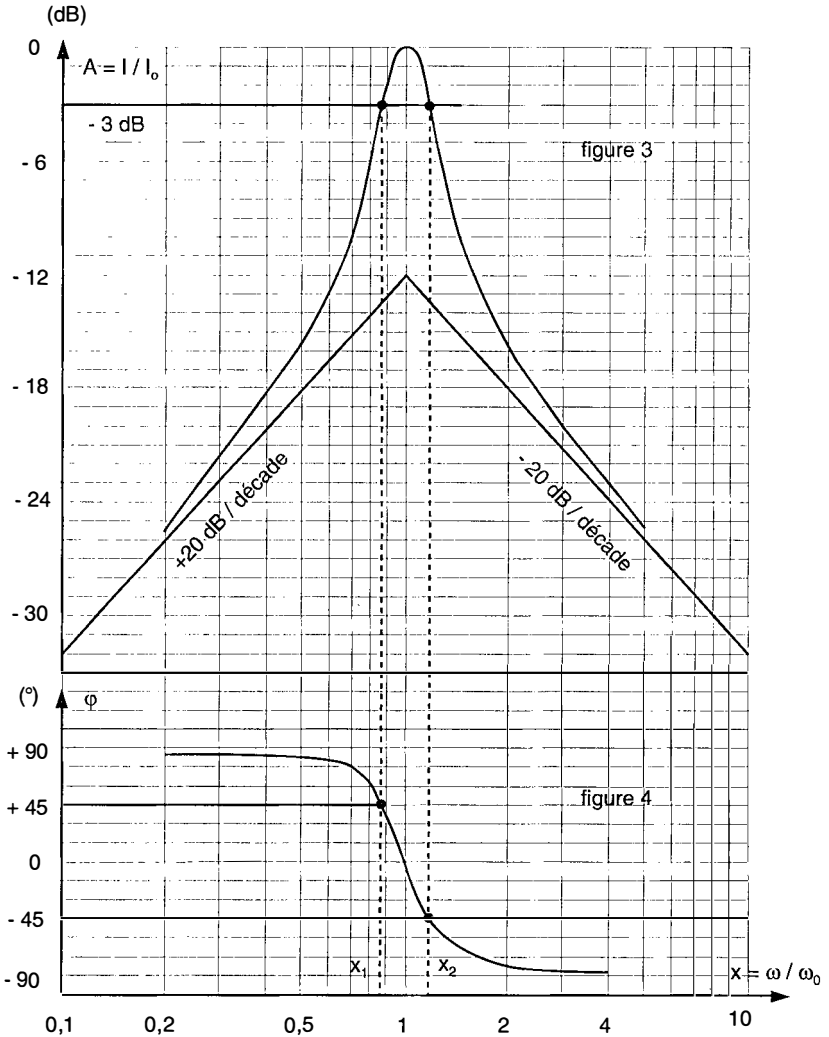
Aux fréquences basses ($x \ll 1$), on a : $\underline{H}(jx) \sim \frac{jx}{Q}$

soit : $\varphi(x) \rightarrow +\frac{\pi}{2}$ et $A(x) \sim \frac{x}{Q}$

On en déduit l'équation de la deuxième asymptote oblique :

$$A_{dB} = 20 \log x - 20 \log Q$$

C'est une droite de pente $+20$ dB/décade qui passe pour $x = 1$ par le point $-20 \log Q = -12$ dB.



Les deux asymptotes se coupent donc au niveau -12 dB sur la verticale $x=1$. Le maximum de la réponse étant à 0 dB, on peut noter que le sommet de la courbe est situé à Q_{dB} par rapport au point de croisement des asymptotes : ceci est une propriété générale des courbes de réponse de ce type, que l'on retrouve dans de nombreux circuits sélectifs (voir par exemple l'exercice n°5.28 consacré au filtre de Wien).

e) Aux limites de la bande passante, x_1 et x_2 sont les valeurs particulières de x pour lesquelles :

$$A_{dB} = 20 \log \frac{I}{I_0} = -3 \text{ dB, soit : } \frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$$

Les symétries déjà mentionnées précédemment imposent naturellement :

$$x_1 = \frac{1}{x_2}, \text{ soit : } \omega_1 \omega_2 = \omega_0^2$$

Si l'on considère l'expression :

$$\underline{H}(jx) = \frac{1}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)} = \frac{1}{I_0}$$

on voit que x_1 et x_2 doivent satisfaire la relation :

$$Q \left(x - \frac{1}{x} \right) = \pm 1$$

de telle sorte que :

$$\underline{H}(jx) = \frac{1}{1 \pm j}$$

Il vient donc immédiatement : $x_2 - x_1 = \frac{1}{Q}$

avec $x_2 > x_1$, soit : $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$

La largeur $\Delta\omega$ de la bande passante à -3 dB est inversement proportionnelle à la valeur de Q : le circuit résonnant est d'autant plus sélectif que son coefficient de qualité est élevé.

Calculons x_1 et x_2 en résolvant l'équation :

$$x - \frac{1}{x} = \pm \frac{1}{Q} \Rightarrow x^2 \pm \frac{x}{Q} - 1 = 0$$

dont les racines positives (qui sont les seules à retenir) sont :

$$x = \frac{1}{2} \left[\pm \frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4} \right]$$

Numériquement :

$$x_1 = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{65}{16}} \right] \cong 0,88 \Rightarrow \omega_1 = 8,8 \text{ krad/s}$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left[+\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{65}{16}} \right] \cong 1,13 \Rightarrow \omega_2 = 11,3 \text{ krad/s}$$

$$\omega_2 - \omega_1 = 2,5 \text{ krad/s}$$

Vérification : $x_1 = 0,88 = \frac{1}{1,13} = \frac{1}{x_2}$

f) L'impédance complexe du circuit :

$$\underline{Z}(jx) = R \left[1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right) \right] = Z e^{-j\varphi}$$

est représentée dans le plan complexe par une droite verticale (figure 5). Lorsque x varie, le point représentatif M parcourt cette droite d'impédance en allant du bas ($x = 0$) vers le haut ($x \rightarrow \infty$).

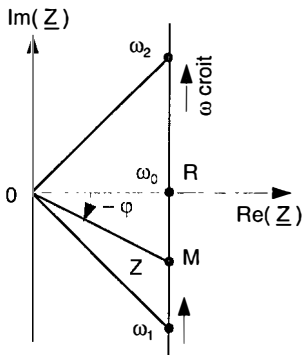


figure 5

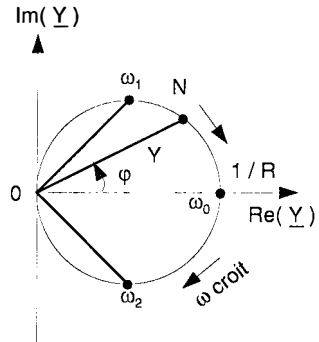


figure 6

Comme $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$, le point N représentatif de l'admittance complexe peut être déduit de M par une inversion [$Y = 1/Z$] suivie d'une symétrie par rapport

à l'axe des réels $[\text{Arg}(\underline{Y}) = \varphi]$. On obtient ainsi le cercle d'admittance représenté figure 6, centré sur l'axe des réels, passant par l'origine, et dont le diamètre est $1/R$. Les points correspondant aux pulsations ω_1 et ω_2 sont diamétralement opposés par rapport à l'axe réel : c'est pourquoi ω_1 et ω_2 sont parfois appelées pulsations "quadrantales".

Ce mode de représentation fournit à la fois le module et l'argument de \underline{Y} , c'est à dire aussi bien l'amplitude I et la phase φ du courant i , puisque $\underline{I} = \underline{Y} \underline{E}$.

g) La tension \underline{U} aux bornes du condensateur s'obtient en utilisant la relation du pont diviseur :

$$\frac{\underline{U}}{\underline{E}} = \frac{1/j\omega C}{1/j\omega C + j\omega L + R} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega \sqrt{LCR} \sqrt{\frac{C}{L}}}$$

On en déduit la forme réduite de la fonction de transfert :

$$\underline{H}'(jx) = \frac{\underline{U}}{\underline{E}} = \frac{1}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}} = A'(x) e^{j\theta(x)}$$

Courbe de réponse en phase (figure 8) :

En remarquant que $\theta(x) = \varphi(x) - \frac{\pi}{2}$, car $\underline{U} = I/j\omega C$, on peut reproduire directement la courbe de réponse en phase après un simple décalage de -90° sur l'échelle des ordonnées (figure 4). On vérifie en particulier qu'à la résonance ($x = 1$) la tension u est en quadrature retard par rapport à la f.é.m. e.

Courbe d'amplitude (figure 7) :

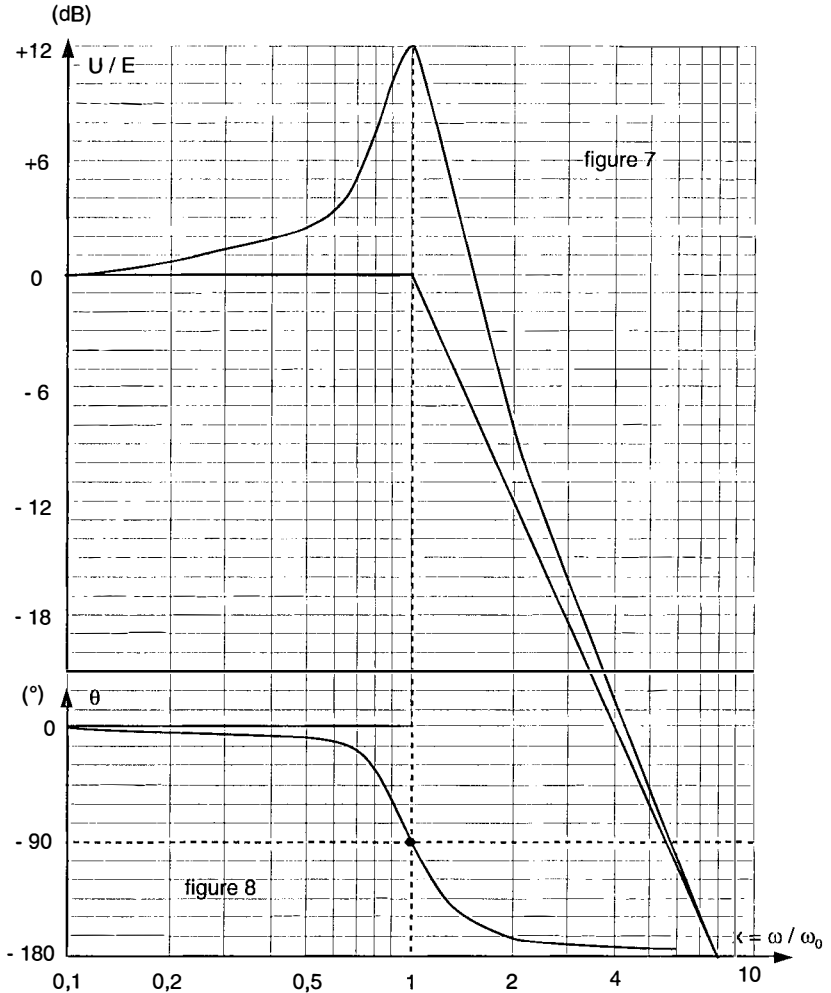
Déterminons tout d'abord le comportement asymptotique du module $A'(x)$:

- pour $x \ll 1$, on voit que : $\underline{H}'(jx) \sim 1$, d'où : $A'_{dB} = 0$ dB.

La courbe d'amplitude présente donc une asymptote horizontale au niveau 0 dB, du côté des fréquences basses.

- pour $x \gg 1$, on a : $\underline{H}'(jx) \sim -\frac{1}{x^2}$ d'où : $A'_{dB} = -40 \log x$

Du côté des fréquences élevées, on a donc une asymptote oblique de pente -40 dB/décade (soit -12 dB/octave). Cette asymptote croise la précédente au niveau 0 dB pour $x = 1$.



Un tel diagramme asymptotique caractérise un filtre passe-bas du second ordre, dont il reste à préciser le comportement au voisinage de la résonance. Pour $x = 1$, on obtient un point intéressant de la courbe, situé à Q_{dB} par rapport au point de croisement des deux asymptotes (soit ici $+12$ dB au dessus,

car $Q = 4$). L'existence de ce phénomène de "surtension" [$U_0 = Q.E$, avec $Q > 1$] indique la présence d'un maximum sur la courbe d'amplitude.

Localisons ce maximum, qui doit se manifester lorsque le dénominateur de $\underline{H}(jx)$ est minimum en module :

$$|D| = \left| 1 - x^2 + j \frac{x}{Q} \right|$$

$$|D|^2 = 1 + (x^2)^2 - 2x^2 + \frac{x^2}{Q^2}$$

$$\frac{d|D|^2}{d(x^2)} = 2x^2 - 2 + \frac{1}{Q^2} = 0, \text{ si } x^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

On voit que ce maximum, qui n'existe que si $Q > 1/\sqrt{2}$, se produit pour une fréquence inférieure à la fréquence de résonance :

$$x_M = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

En reportant cette valeur de x_M , on obtient l'ordonnée du sommet (supérieure à Q) :

$$A'_M = \frac{Q}{\sqrt{1 - 1/4Q^2}}$$

Numériquement, pour $Q = 4$: $x_M = 0,985$; $A'_M = 4,03$

En première approximation, on admet généralement : $x_M \cong 1$ et $A'_M \cong Q$, pourvu que Q soit supérieur à 4. Dans ces conditions, le maximum se trouve pratiquement à la fréquence de résonance f_0 .

En présence d'un tel maximum, la courbe recoupe nécessairement le niveau 0 dB en un point d'abscisse x_0 facile à préciser, car il correspond à :

$$|D| = 1$$

$$\text{soit : } |D|^2 = 1 + (x^2)^2 - 2x^2 + \frac{x^2}{Q^2} = 1$$

$$x^2 \left(x^2 - 2 + \frac{1}{Q^2} \right) = 0 \text{ si : } x^2 = 2 - \frac{1}{Q^2} = 2 \left(1 - \frac{1}{2Q^2} \right)$$

par conséquent : $x_0 = x_M \sqrt{2}$

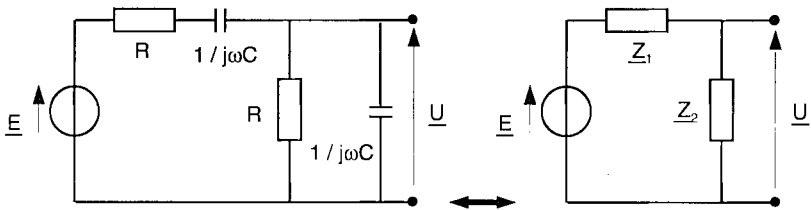
Remarque :

En étudiant la réponse en tension aux bornes de l'inductance L , on obtiendrait une fonction de transfert du type :

$$\underline{H}''(jx) = \frac{U_L}{E} = \frac{-x^2}{(1-x^2) + j\frac{x}{Q}}$$

[passe-haut du second ordre ; jx est remplacé par $1/jx$ dans $\underline{H}'(jx)$]

Pour une même valeur de Q , la courbe de réponse en amplitude serait symétrique de la précédente par rapport à la verticale $x = 1$.

EXERCICE 5.28 :

a) Désignons par \underline{Z}_1 l'impédance du dipôle RC série, et par \underline{Z}_2 celle du dipôle RC parallèle. La relation du pont diviseur de tension permet d'écrire :

$$\frac{U}{E} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1} = \frac{1}{1 + \underline{Z}_1 \underline{Y}_2}$$

avec : $\underline{Z}_1 = R + \frac{1}{j\omega C}$, et : $\underline{Y}_2 = \frac{1}{R} + j\omega C$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } \underline{H}(j\omega) &= \frac{1}{1 + \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) \left(\frac{1}{R} + j\omega C\right)} = \frac{1}{1 + 1 + 1 + j\omega RC + \frac{1}{j\omega RC}} \\ &= \frac{\frac{1}{3}}{1 + j \cdot \frac{1}{3} \left(\omega RC - \frac{1}{\omega RC}\right)} \end{aligned}$$

b) Cette écriture permet d'identifier :

$$A_0 = 1/3 ; Q = 1/3 ; \omega_0 = 1/RC = 1 \text{ krad/s.}$$

On constate que A_0 et Q ne dépendent pas des valeurs de R et C , qui n'influent que sur ω_0 .

c) Afin de normaliser la réponse en fréquence, posons $x = \omega/\omega_0$ (fréquence réduite). Il s'agit alors d'étudier la fonction :

$$\underline{H}(jx) = \frac{A_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} = A(x) e^{j\varphi(x)}$$

Elle est du même type que celle que nous avons rencontrée lors de l'étude de la résonance d'un circuit RLC (cf exercice 5.27).

Résumons les résultats :

x	0	0,3	1	3,3	∞
$\underline{H}(jx)$	$\sim -\frac{A_0 x}{jQ}$	$\frac{A_0}{1-j}$	A_0	$\frac{A_0}{1+j}$	$\sim \frac{A_0}{jQx}$
A(x)	0	$1/3\sqrt{2}$	$\frac{1}{3}$	$1/3\sqrt{2}$	0
$\varphi(x)$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	0	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$

- La réponse en amplitude $A(x)$ présente un maximum $A_0 = 1/3$ (niveau $-9,5$ dB) pour $x = 1$. De part et d'autre de ce maximum, elle possède 2 asymptotes obliques de pentes respectives $+20$ dB/décade pour $x \ll 1$, et -20 dB/décade pour $x \gg 1$.

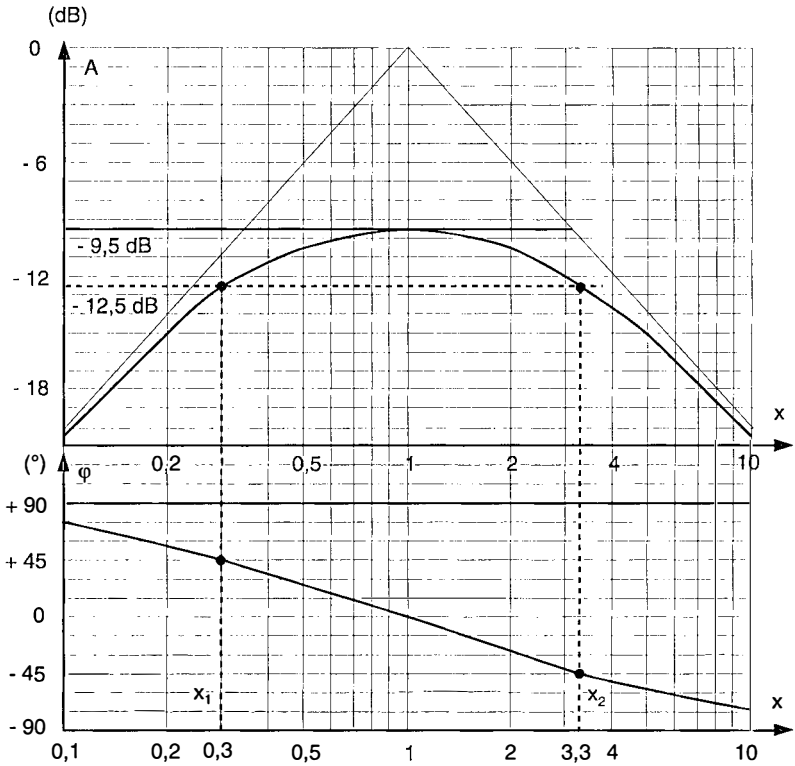
Ces deux asymptotes se croisent au point d'abscisse $x = 1$, au niveau 0 dB ($A_0/Q = 1$). La courbe est située au dessous de ses asymptotes, le circuit étant peu sélectif en raison de la faiblesse du coefficient $Q < 1$; la bande passante à -3 dB est $\Delta\omega = \omega_0/Q = 3$ krad/s ; les pulsations de coupure étant données par la relation :

$$\left(x - \frac{1}{x}\right) = \pm \frac{1}{Q}, \text{ d'où l'on tire : } x = \frac{1}{2}(\pm 3 + \sqrt{13}), \text{ on obtient :}$$

$$\omega_1 \cong 0,3 \text{ krad/s, et } \omega_2 \cong 3,3 \text{ krad/s}$$

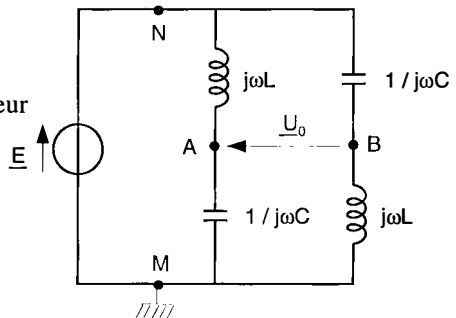
- La réponse en phase $\varphi(x)$ varie lentement de $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ pour $x \ll 1$ à $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ pour $x \gg 1$ en passant par $\varphi = 0$ pour $x = 1$.

A la pulsation $\omega = \omega_0$, le filtre délivre donc un signal de sortie exactement en phase avec le signal d'entrée. Cette propriété est mise à profit dans la conception de certains modèles d'oscillateurs sinusoïdaux.



EXERCICE 5.29 :

a) En appliquant la relation du diviseur de tension en A et B :



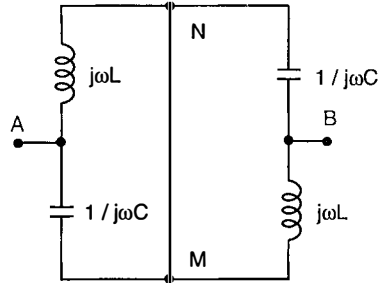
$$\underline{U}_0 = \underline{U}_A - \underline{U}_B = \underline{E} \left[\frac{\frac{1}{j\omega C} - j\omega L}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \right]$$

$$= \underline{E} \frac{1 + \omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC} = \underline{E}_T$$

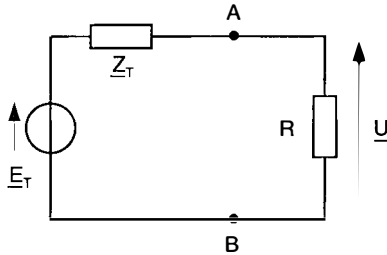
La source indépendante étant neutralisée, c'est-à-dire remplacée par un court-circuit entre N et M, on calcule l'impédance vue entre A et B.

$$\underline{Z}_{AB} = 2(\underline{Z}_L // \underline{Z}_C) = 2 \frac{j\omega L / j\omega C}{j\omega L + 1 / j\omega C}$$

$$= \frac{2j\omega L}{1 - \omega^2 LC} = \underline{Z}_T$$



On en déduit le schéma équivalent de Thévenin.

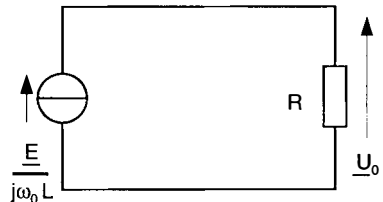


b) On observe que \underline{Z}_T devient infini lorsque la condition $\omega^2 LC = 1$ est réalisée : le générateur de Thévenin n'a plus de signification (sa f.é.m. est d'ailleurs également infinie). Qu'en est-il du générateur de Norton ?

$$\underline{I}_{cc} = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_T} = \frac{1 + \omega^2 LC}{2j\omega L} \underline{E} \text{ pour } \omega \text{ quelconque devient :}$$

$$\underline{I}_{cc} = \frac{\underline{E}}{j\omega_0 L} \text{ à la pulsation } \omega_0.$$

La charge est alors alimentée par une source de Norton qui lui fournit un courant $\underline{E}/j\omega_0 L$ indépendant de la valeur de R.



c) Le schéma équivalent de Thévenin donne :

$$\underline{U} = \underline{E}_T \frac{R}{R + \underline{Z}_T} \Rightarrow \frac{\underline{U}}{\underline{E}} = \frac{1 + \omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC} \cdot \frac{R}{R + \frac{2j\omega L}{1 - \omega^2 LC}}$$

$$\text{d'où : } \underline{H}(j\omega) = \frac{1 + \omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC + 2j\omega L / R}$$

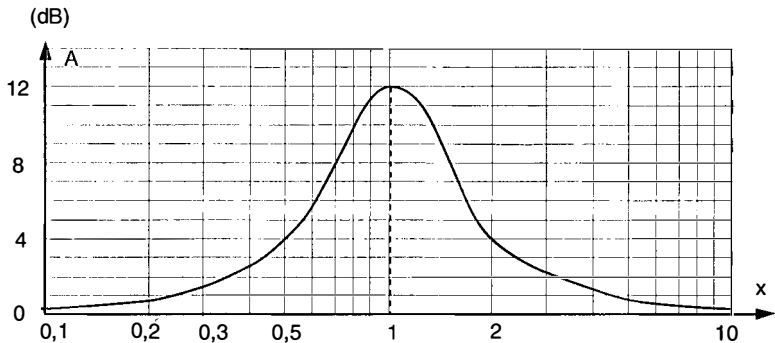
$$\text{ce qui permet d'identifier : } Q = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Application numérique : $\omega_0 = 10 \text{ krad/s}$; $Q = 2$.

$$\text{d) On étudie la fonction réduite : } \underline{H}(jx) = \frac{1 + x^2}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}}$$

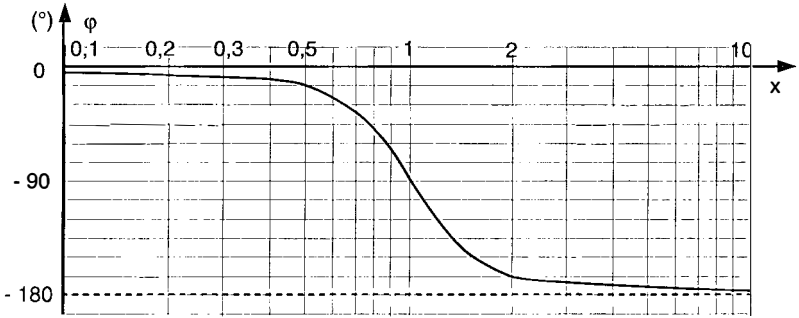
x	0	0,5	1	2	∞
$\underline{H}(jx)$	1	$\frac{1,25}{0,75 + j \cdot 0,25}$	-j4	$\frac{5}{-3 + j1}$	-1
A(x)	1	1,58	4	1,58	1
$\varphi(x)$	0	-18°	-90°	-162°	-180°

• La courbe de réponse en amplitude $U/E = A(x)$ présente la même asymptote horizontale ($A_{\min} = 1$) pour $x \rightarrow 0$ ou $x \rightarrow \infty$. Elle passe par un maximum ($A_{\max} = 2Q$) pour $x = 1$. Il s'agit donc d'un filtre sélecteur accordé sur la pulsation ω_0 . La sélectivité serait améliorée si l'on augmentait la valeur du coefficient de qualité Q : il faudrait pour cela augmenter la valeur de R .



• La courbe de réponse en phase $\varphi(x)$ présente deux asymptotes horizontales :

$\varphi \rightarrow 0$ pour $x \ll 1$, et $\varphi \rightarrow -\pi$ pour $x \gg 1$. Pour $x = 1$ (voir question b), la tension u est en quadrature retard sur e .



EXERCICE 5.30 :

a) Les potentiels inconnus étant notés $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3$, écrivons les équations de nœuds en posant :

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= G, \text{ et } j\omega C = Y \\ (2G + Y) \underline{U}_1 - G \underline{U}_2 &= G \underline{E} \\ -G \underline{U}_1 + (2G + Y) \underline{U}_2 - G \underline{U}_3 &= 0 \\ -G \underline{U}_2 + (G + Y) \underline{U}_3 &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit : $\underline{U}_3 / \underline{E} = \Delta_3 / \Delta$

avec : $\Delta_3 = G(G^2 - 0) = G^3$

et : $\Delta = (2G + Y) [(2G + Y)(G + Y) - G^2] + G [-G(G + Y) - 0]$
 $= G^3 + 6 G^2 Y + 5 G Y^2 + Y^3$

Il vient :

$$\frac{\underline{U}_3}{\underline{E}} = \frac{1/R^3}{\left[\frac{1}{R^3} + 6 \frac{j\omega C}{R^2} + 5 \frac{(j\omega C)^2}{R} + (j\omega C)^3 \right]} = \underline{H}(j\omega)$$

et finalement :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{(1 - 5 \omega^2 R^2 C^2) + j\omega RC(6 - \omega^2 R^2 C^2)}$$

On peut vérifier qu'il s'agit d'une fonction passe-bas du troisième ordre :

si $\omega \rightarrow 0, \underline{H}(j\omega) \rightarrow 1$

si $\omega \rightarrow \infty, \underline{H}(j\omega) \rightarrow \frac{1}{(j\omega RC)^3}$

La courbe de réponse présente donc une asymptote horizontale au niveau 0 dB du côté des basses fréquences, et une asymptote oblique à -60 dB/décade du côté des hautes fréquences. Le point de croisement de ces deux asymptotes se situe en $\omega = 1/RC$.

b) Pour que les tensions u_3 et e soient en opposition de phase, la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ doit prendre une valeur réelle négative. Il faut donc annuler sa partie imaginaire en réalisant la condition $(6 - \omega^2 R^2 C^2) = 0$. Il n'existe qu'une seule valeur satisfaisante pour la pulsation :

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{6}}{RC}$$

c) Il reste à vérifier le signe de la fonction de transfert à la pulsation ω_0 :

$$\underline{H}(j\omega_0) = \frac{1}{1-5.6} = -\frac{1}{29}$$

Ce résultat est effectivement négatif. L'atténuation est :

$$A_{dB} = -20 \log(29) = -29,25 \text{ dB à la pulsation } \omega_0.$$

EXERCICE 5.31 :

a) Pour obtenir la fonction de transfert, on peut se dispenser de reprendre l'intégralité des calculs précédents : il suffit de permuter $1/R$ et $j\omega C$. On obtient alors :

$$\frac{\underline{U}'_3}{\underline{E}} = \frac{(j\omega C)^3}{(j\omega C)^3 + 6 \frac{(j\omega C)^2}{R} + 5 \frac{j\omega C}{R^2} + \frac{1}{R^3}}$$

et :

$$\underline{H}'(j\omega) = \frac{-j(\omega RC)^3}{(1-6 \omega^2 R^2 C^2) + j\omega RC(5-\omega^2 R^2 C^2)}$$

b) $\underline{H}'(j\omega)$ devient réelle lorsque $(1-6 \omega^2 R^2 C^2) = 0$, ce qui se produit à la pulsation :

$$\omega'_0 = \frac{1}{RC\sqrt{6}} \neq \omega_0$$

c) On obtient alors :

$$\underline{H}'(j\omega'_0) = \frac{-(\omega'_0 RC)^2}{5 - (\omega'_0 RC)^2} = \frac{-1/6}{5 - 1/6} = -\frac{1}{29}$$

L'atténuation est inchangée.

Index

Active (puissance)	112	Conventionnel (courant)	2
Adaptation de puissance	36, 41, 124	Cos φ	113
Admittance complexe	107, 108, 117	Coulomb	2
Alternatif (signal)	91	Coupure (fréquence de)	126, 237
Ampère	2	Courant conventionnel	2
Amplitude	91, 98	—— de maille	51
Amplitudes complexes	98	—— (diviseur de)	30, 40
—— (méthode des)	106, 110	—— (source de)	10
Apparente (puissance)	112	Court-circuit	8, 33, 62
Argument	96, 98	Cramer	129
Association de dipôles	22, 39, 109		
Atténuation	128, 238, 255	dB	114
		Décade	239, 242, 247
Bande passante	115, 126, 243	d.d.p.	4
Bobine	101	Décibel	114
Bode	114, 126	dépendante (source)	11, 62
Branche(s)	17	Déphaseur	128
—— (méthode des)	46, 49, 81	Déterminant	129
		Dipôle(s)	5
Capacité	99	—— passif	5
Caractéristiques d'un dipôle	5	—— (association de)	22, 39, 109
Cartésienne (forme)	96	Diviseur de courant	30, 40
Circuit à deux nœuds	28, 41	—— de tension	29, 40, 72
—— à une maille	25, 41	Dualité tension-courant	31
—— ouvert	8, 62		
Coefficient de qualité	118, 126, 127	Efficaces (valeurs)	92
Complexe (admittance)	107, 108, 117	Énergie reçue par un dipôle	6
—— (amplitude)	98	—— par un résistor	8
—— (impédance)	107, 116	Entrée (résistance)	87, 190
—— (méthode)	106, 110	Équivalence étoile-triangle	78, 90
—— (nombre)	95	—— Thévenin-Norton	71
Condensateur	99	Étoile	78, 90
Conductance	8		
Continu (notations en régime)	2, 4	Facteur de puissance	113
—— (source de courant)	10	Farad	99
Contrôlée (source)	11, 62	f.é.m.	9
Convention générateur	6	Filtre	125
—— récepteur	6	—— passe-bande	115
		—— passe-bas	128, 238, 247, 254
		—— passe-haut	128, 249, 255
		Flèche associée à un courant	1
		—— à une tension	4
		Fonction de transfert	114, 125

Fréquence de coupure	126, 237	—— (méthode des)	51, 83
Fresnel (diagramme de)	94	Maximum	115, 247
—— (méthode de)	105, 116	—— de puissance	36, 41, 124
—— (vecteur de)	94	Millman	77, 90
		Mineur	130
Générateur(s)	33, 42	Module	96, 98
—— (convention)	6	Moyenne (puissance)	111
—— (transformation de)	33		
		Neutralisation d'une source	62
Henry	101	Nœud(s)	17
		—— (circuits à deux)	28, 41
Imaginaire	96	—— (équations de)	46
Impédance complexe	107, 116	—— (loi des)	17, 36, 108
Indépendante (source)	9	—— (méthode des)	57, 85
Inductance	101	Norton (générateur de)	70
Instantannée (puissance)	111	—— (théorème de)	66, 86, 111
Interne (impédance)	111	Notations pour les courants	2
—— (résistance)	35, 70	—— pour les tensions	4
Intensité d'un courant	1	Nyquist	114, 126
—— efficace	93		
Joule	8, 93	Octave	239, 242, 247
		Ohm	8
		—— (loi d')	8, 109
		Oscillateur	215, 251
Kennely	78, 90	Parallèle	23, 25
Kirchhoff	17, 19, 108	Paramètres (d'un réseau)	45, 80
		Passe-bande	115
Liée (source)	11, 62	Passe-bas	128, 238, 247, 254
Loi(s) d'association	22, 39, 109	Passe-haut	128, 249, 255
—— des mailles	19, 38, 108	Passif (dipôle)	5
—— des nœuds	17, 36, 108	Périodique	91
—— d'Ohm	8, 109	Phase	91, 98
Losange	11, 62	Polarité d'une source	10
		Polygone	78
		Pont de Maxwell	120
		—— Sauty	119
Maille(s)	17	—— Schering	119
—— (circuits à une)	25, 41	—— Wheatstone	41, 82, 90
—— (courants de)	51	Potentiel	2
—— (équations de)	47	—— (différence de)	4
—— indépendantes	47	Pulsation	91
—— (lois des)	19, 38, 108	Puissance active	112

— apparente	112	Travail	2
— délivrée par un générateur	35	Tension (calcul de)	12
— (facteur de)	113	— (diviseur de)	29, 40, 72
— moyenne	111	— (source de)	9
— réactive	113	Théorème de Kennely	78, 90
— reçue par un dipôle	6, 13	— Millman	77, 90
— reçue par un résistor	8	— Norton	66, 86, 111
		— superposition	61, 86
Quadrantale	246	— Thévenin	64, 86, 111
Qualité (coefficient de)	118, 126, 127	Thévenin (générateur de)	69
Quartz	118, 214	— (théorème de)	64, 86, 111
		Transfert (fonction de)	114, 125
Réel (générateur)	33	Transformation de générateurs	33
Réactance	215, 240	Treillis	127
Réactive	113	Triangle	78, 90
Récepteur	5	Trigonométrique (forme)	96
— (convention)	6		
Représentation complexe	110	V. A.	112
— de Fresnel	105, 116	Valeurs efficaces	92
Réseau déphaseur	128	V. A. R.	113
Résistance	8	Vecteur de Fresnel	94
— d'entrée	87, 190	Volt	3
— de sortie	87, 191		
— interne	35, 70, 78	Wheastone	41, 82, 90
Résistor	7	Wien	126
Résonance	114, 126, 214		
Sauty	119		
Schering	119		
Sélectivité	244, 250		
Série	22, 24		
Signes (conventions de)	6		
Sinusoïdal	91		
Sortie (résistance)	87, 191		
Source contrôlée	11, 62		
— de courant	10		
— de tension	9		
— réelle	33		
Superposition	61, 86		
Surtension	248		
Susceptance	213		